1. ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE REALE

1.1.Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

1.1.1. Şiruri de numere reale.

Presupunem cunoscute noţiunile de bază despre mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale şi mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

Reamintim că pe $\mathbb{R}$ se poate defini o structură algebrică de corp comutativ total ordonat la fel ca în $\mathbb{Q}$ dar cele două mulţimi se deosebesc esenţial prin funcţionarea în $\mathbb{R}$ a axiomei marginii superioare, care constituie punctul de plecare în stabilirea tuturor rezultatelor profunde ale analizei.

Reamintim că definind *modulul* unui număr real x astfel:

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

se verifică imediat următoarele proprietăţi:

[N$_1$] $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

[N$_2$] $|x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

[N$_3$] $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

De asemenea, definind funcţia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin

$$d(x, y) = |x - y|$$

se verifică imediat, folosind [N$_1$], [N$_2$], [N$_3$], următoarele proprietăţi:

[D$_1$] $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

[D$_2$] $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

[D$_3$] $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$

Numărul real şi pozitiv $d(x, y)$ este numit *distanţa euclidiană* între numerele x, y, funcţia d se numeşte metrică, iar $(\mathbb{R}, d)$ este un spaţiu metric. Utilizând această noţiune se poate exprima cât de “apropiate” sunt două numere reale şi se poate introduce noţiunea de şir convergent de numere reale, cunoscută din liceu, pe care o vom reaminti, precum şi noţiunea de şir fundamental de numere reale pe care o vom prezenta în continuare.

Definiţia 1.1.1.1. Se numeşte *şir de numere reale* orice funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este definit un număr real $x_n = f(n)$ numit *termenul de rang n*, sau *termenul general al şirului*; şirul însuşi se notează $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, iar mulţimea $\{x \in \mathbb{R} : \exists\ n \in \mathbb{N},\ x = x_n\}$ se numeşte *mulţimea termenilor şirului*.

Observaţia 1.1.1.1. Trebuie făcută distincţia între un şir şi mulţimea termenilor lui, deoarece două şiruri distincte pot avea aceeaşi mulţime de termeni. De exemplu, $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = (-1)^n$ şi $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $g(n) = (-1)^{n+1}$ sunt două şiruri distincte cu aceeaşi mulţime de termeni $\{-1, 1\}$.

Definiţia 1.1.1.2. Şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale se numeşte *convergent* dacă există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, încât, oricare ar fi $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$ adică $d(x_n, x) < \varepsilon$. Elementul x se numeşte *punct limită* pentru şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. În caz contrar, şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numeşte *divergent*.

Dacă $x \in \mathbb{R}$ este punct limită pentru şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se mai spune că acest şir *converge la x*, sau că *x este limita şirului* şi se notează $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Definiţia 1.1.1.3. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale.
Fie $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(m) = n_m$ un şir strict crescător de numere naturale. Funcţia $\varphi = f \circ h$ se numeşte *subşir* al şirului f.

Evident, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\varphi(m) = f(h(m)) = f(n_m) = x_{n_m}$ iar $n_m \geq m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Definiţia 1.1.1.4. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale. Elementul $x \in \mathbb{R}$ se numeşte *punct de acumulare* pentru şirul f dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $m \in \mathbb{N}$ există $n_m \geq m$ încât $|x_{n_m} - x| < \varepsilon$ adică $d(x_{n_m}, x) < \varepsilon$.

Observaţia 1.1.1.2. a) Se poate demonstra că $x \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru un şir f de numere reale dacă şi numai dacă există un subşir al acestuia care are limita x (*lema lui Cesaro*). Este evident că orice punct limită pentru un şir este punct de acumulare pentru acesta. Reciproca acestei afirmaţii nu este, în general, adevărată. De exemplu, şirul $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ are două puncte de acumulare (-1 şi 1) dar nu are nici un punct limită.
b) Un şir convergent de numere reale are un singur punct de acumulare (limita şirului); dacă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ este un şir mărginit de numere reale, iar $\gamma(f)$ este mulţimea punctelor de acumulare ale şirului f, se poate demonstra că $\gamma(f) \neq \emptyset$, aceasta fiind consecinţă a axiomei marginii superioare, extrem de importantă în demonstraţia teoremei 1.1.1.1. În $\overline{\mathbb{R}}$, $\gamma(f)$ are întotdeauna margine inferioară şi margine superioară. Se notează $\underline{\lim}\ x_n = \inf \gamma(f)$ şi se numeşte *limita inferioară* a şirului f ; analog,
$\overline{\lim}\ x_n = \sup \gamma(f)$ se numeşte *limita superioară* a şirului f. Se poate arăta că un şir mărginit de numere reale este convergent dacă şi numai dacă

$$\underline{\lim}\ x_n = \overline{\lim}\ x_n$$

c) Proprietăţile specifice legate, fie de structura algebrică a lui $\mathbb{R}$ fie de proprietatea de a fi o mulţime total ordonată sunt cunoscute, în mare parte, din liceu şi au mai mică importanţă pentru demersul nostru. De aceea vom prezenta aici doar proprietăţile şirurilor de numere reale legate de completitudinea lui $\mathbb{R}$, foarte importante în practică şi nestudiate în liceu.

Definiţia 1.1.1.5. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale. Şirul f se numeşte *şir fundamental* (sau şir *Cauchy*) dacă şi numai dacă pentru orice
$\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ încât dacă $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ şi $m \geq n_0$ atunci
$|x_n - x_m| < \varepsilon$ adică $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sau, echivalent, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ şi orice $p \in \mathbb{N}$.
Observaţia 1.1.1.3. În definiţia convergenţei unui şir apare în mod explicit limita şirului, pe când în definiţia unui şir fundamental intervin numai termeni ai şirului, deci aceasta din urmă este o definiţie intrinsecă. Determinarea limitei este dificilă, în multe situaţii imposibilă. Prin urmare, teorema următoare este extrem de importantă:

Teorema 1.1.1.1. *(criteriul general de convergenţă al lui Cauchy)*
Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă el este un şir fundamental. (Se spune că $\mathbb{R}$, în raport cu distanţa euclidiană este spaţiu metric complet)

Observaţia 1.1.1.4. Având în vedere această teoremă, pentru testarea convergenţei unui şir de numere reale este suficient să se verifice condiţia intrinsecă de a fi şir fundamental. Apoi definiţia 1.1.1.2. arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$, deci putem aproxima $x \approx x_n$ şi aproximarea este cu atât mai bună cu cât rangul n este mai mare. Referitor la evaluarea erorii cu care se face această aproximare, putem preciza următoarele: dacă $|x_{n+p} - x_n| \leq y_n$ pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental, deci convergent; dacă $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se poate arăta că $|x_n - x| \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, inegalitate care poate fi considerată formulă de evaluare a erorii cu care se face aproximarea $x \approx x_n$. Evident, dacă se impune ca eroarea să fie mai mică decât ε dat, se va determina cea mai mică valoare n_ε a lui n pentru care $y_n < \varepsilon$ şi se va aproxima $x \approx x_n$.

Exemplul 1.1.1.1. Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Deoarece

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq \underbrace{\frac{1}{n+n} + \ldots + \frac{1}{n+n}}_{\text{de n ori}} = \frac{1}{2}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirul f nu este fundamental, deci nici convergent.

Exemplul 1.1.1.2. Fie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k(k+1)}$.

Deoarece $|a_{n+p} - a_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right| =$

$= \left| \sum_{k=n+1}^{k=n+p} \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\sin k!|}{k(k+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} <$

$\frac{1}{n+1}$, pentru orice $n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, deducem că şirul f este şir fundamental, deci convergent.

Prin urmare, există şi este unic $a \in \mathbb{R}$, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, dar a nu se poate determina cu exactitate. Pentru a determina o valoare aproximativă, cu o eroare mai mică decât 10^{-3} (de exemplu) observăm că $\frac{1}{n+1} <$

$\frac{1}{10^3} \Leftrightarrow n + 1 > 10^3 \Leftrightarrow n > 10^3 - 1.$

Prin urmare, cel mai mic n pentru care $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^3}$ este 10^3.Deci $a \approx a_{1000}$

Se poate demonstra că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, intervalele $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[a, \infty)$ sunt spaţii metrice *complete* în raport cu metrica euclidiană.

Fie X unul dintre aceste intervale sau $\mathbb{R}$. Funcţia $f : X \to X$ se numeşte *contracţie* dacă există $c \in [0, 1)$ numit *coeficient de contracţie* astfel încât $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$.

Utilizând teorema 1.1.1.1. reformulată pentru X se poate demonstra următorul rezultat important cunoscut sub numele de *Teorema de punct fix a lui Banach* sau *Principiul contracţiei* :

Teorema 1.1.1.2. Pentru orice contracţie $f : X \to X$ există şi este unic un punct $\xi \in X$ astfel încât $f(\xi) = \xi$. Punctul ξ se numeşte *punct fix* al aplicaţiei f. Trebuie reţinută metoda de determinare a punctului fix cunoscută sub numele de metoda aproximaţiilor successive: prima aproximaţie $x_0 \in X$ este aleasă arbitrar, apoi aproximaţiile $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$, ...sunt determinate succesiv folosind f; se demonstrează că $|x_n - x_{n+p}| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n$, pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$, unde c este coeficientul de contracţie, $\delta = d(x_0, x_1) = |x_0 - x_1|$; indiferent de alegerea lui x_0 şirul de aproximaţii succesive $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la aceeaşi limită ξ. Formula precisă $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ este înlocuită în practică prin formula de aproximare $\xi \approx x_n$. Pentru a evalua eroarea care apare în această aproximare, se poate arăta că $|x_n - \xi| \leq \frac{\delta}{1-c} \cdot c^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi se raţionează apoi ca în observaţia 1.1.1.4.

1.1.2. Serii de numere reale.

Noţiunea de serie de numere reale a apărut din necesitatea de a da un sens natural sumei termenilor unui şir de numere reale. Deoarece nu se pot aduna (în sens algebric) o infinitate de numere

reale, realizarea acestui scop a fost posibilă numai cu ajutorul noţiunii de limită, numai în anumite cazuri, studiul seriilor îmbinând studiul sumelor finite cu cel al limitelor de şiruri.

A) Serii convergente. Criterii generale de convergenţă

Definiţia 1.1.2.1. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ un şir de numere reale.

Fie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) = s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Perechea de şiruri *(f, g)* se numeşte *serie generată de şirul f*. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, s_n se numeşte *suma parţială de ordin n* a seriei, iar şirul *g* se numeşte *şirul sumelor parţiale asociat şirului f*. Seria *(f, g)* se numeşte *convergentă* dacă şirul *g* al sumelor parţiale este convergent şi *divergentă* în caz contrar. Dacă seria *(f, g)* este convergentă, se defineşte *suma seriei* ca fiind numărul real *s* $= \lim_{n\to\infty} s_n$ şi se notează $s = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

Observaţia 1.1.2.1. a) Deşi poate crea confuzii, notaţia $\sum_{n\geq 0} x_n$ pentru seria *(f, g)* este frecvent folosită. Trebuie însă mereu făcută distincţia între seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ şi suma sa, $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, care este un element asociat seriei numai în caz de convergenţă şi care reprezintă suma termenilor şirului dat. În cazul în care seria este divergentă, nu putem atribui nici un sens sumei termenilor şirului care generează seria.
b) În studiul unei serii, rolul principal este jucat de şirul sumelor parţiale, care sunt sume finite. Prin trecerea la limită însă, se pierd o seamă de proprietăţi ale sumelor finite. Astfel, la sumele seriilor nu avem comutativitate, asociativitate, seriile nu pot fi, în general, înmulţite.
c) Dacă se renunţă la un număr finit de termeni ai unei serii (sau dacă se adaugă un număr finit de termeni) seria nou obţinută va avea aceeaşi natură ca şi seria iniţială. În caz de convergenţă, suma se modifică scăzând (sau adăugând) suma finită a termenilor la care se renunţă (respectiv, care se adaugă)
d) Problema principală în studiul unei serii este determinarea naturii şi, în caz de convergenţă, evaluarea exactă sau măcar aproximativă a sumei seriei respective.

Exemplul 1.1.2.1. Seria $\sum_{n\geq 0} q^n$, unde $q \in \mathbb{R}$ este fixat, se numeşte *serie geometrică de raţie q*. Sumele parţiale asociate sunt:

$$s_0 = 1,\ s_1 = 1 + q,\ s_2 = 1 + q + q^2,\ \ldots,\ s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n,\ \ldots$$

Se demonstrează prin inducţie că:

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases} \text{, oricare ar fi } n \in \mathbb{N}$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$ dacă şi numai dacă $q \in (-1, 1)$, rezultă că seria geometrică de raţie *q* este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi, în acest caz, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Exemplul 1.1.2.2. Seria $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ se numeşte *serie armonică*. Sumele parţiale sunt: $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, …, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$,… Deoarece $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ pentru orice $n\in \mathbb{N}^*$ (vezi exemplul 1.1.1.1.) rezultă că şirul $(s_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ al sumelor parţiale nu este şir fundamental, deci nici convergent. Rezultă că seria armonică este divergentă.

Exemplul 1.1.2.3. Să considerăm acum seria $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sin n!}{n(n+1)}$. Şirul sumelor parţiale are în acest caz termenul general $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin k!}{k(k+1)}$, $n\in \mathbb{N}^*$. Acest şir a fost studiat în exemplul 1.1.1.2 unde s-a arătat că este şir fundamental, deci convergent. Rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sin n!}{n(n+1)}$ este convergentă.

Observaţia 1.1.2.2. În exemplul 1.1.2.1. am putut determina natura şi chiar suma seriei considerate exprimând convenabil termenul general al şirului sumelor parţiale. Acest lucru nu este posibil întotdeauna. În exemplul 1.1.2.2. se deduce că seria este divergentă, fără a găsi o formă convenabilă pentru s_n. În exemplul 1.1.2.3. se deduce că seria este convergentă, dar nu se poate găsi o expresie convenabilă pentru s_n şi, prin urmare, nu se poate cunoaşte cu exactitate suma seriei.

Este necesară, deci, dezvoltarea unei teorii calitative a seriilor, indicând criterii de convergenţă care ţin cont de forma termenului general al seriei studiate. Pentru o serie care se dovedeşte a fi convergentă (în urma aplicării unui criteriu de convergenţă) se aproximează suma seriei cu o sumă parţială de un ordin convenabil ales (în funcţie de eroarea permisă de problemă)

Teorema 1.1.2.1. *(criteriul necesar de convergenţă)*

Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este convergentă atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Observaţia 1.1.2.3. Condiţia din teorema 1.1.2.1. este doar necesară, dar nu şi suficientă pentru convergenţa unei serii. De exemplu, şirul $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, $f(n)=\frac{1}{n}$ este convergent şi are limita zero, dar seria generată de acest şir (seria armonică) nu este convergentă. Din teoremă rezultă imediat că, dacă un şir *f* este divergent sau este convergent cu limita diferită de zero, atunci seria generată de şirul *f* este divergentă. De exemplu, seria $\sum\limits_{n\geq 2}\sqrt[n]{n}$ este divergentă deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$; seria $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n$ este divergentă deoarece şirul $((-1)^n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ nu are limită.

Teorema 1.1.2.2. a) Dacă $\lambda\in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, seria $\sum\limits_{n\geq 0}\lambda x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$;

b) Dacă seriile $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} y_n$ sunt convergente, cu sumele *s*, respectiv σ, atunci seriile $\sum\limits_{n\geq 0}(x_n + y_n)$, $\sum\limits_{n\geq 0}(x_n - y_n)$ sunt convergente, cu sumele $s + \sigma$, respectiv $s - \sigma$.

Teorema 1.1.2.3. *(criteriul general de convergenţă al lui Cauchy pentru serii)*

Seria de numere reale $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq n_0$ şi oricare ar fi $p \in \mathbb{N}^*$ să avem:

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

Observând că $x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} = s_{n+p} - s_n$, esenţa demonstraţiei constă în aplicarea criteriului general de convergenţă al lui Cauchy şirului sumelor parţiale. (vezi şi exemplele 1.1.1.2. şi 1.1.2.3.)

O clasă foarte importantă de serii o constituie seriile absolut convergente.

Definiţia 1.1.2.2. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$. Seria de numere reale $\sum\limits_{n\geq 0} x_n$ se numeşte *absolut convergentă* dacă seria de numere reale pozitive $\sum\limits_{n\geq 0} |x_n|$ este convergentă.

Teorema 1.1.2.4. Orice serie absolut convergentă de numere reale este convergentă.

Observaţia 1.1.2.4. Reciproca acestei teoreme nu este, în general, adevărată. Există serii convergente care nu sunt absolut convergente. De exemplu, seria $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ numită *serie armonică alternată* , este convergentă (vezi exemplul 1.1.2.5) dar nu este absolut convergentă deoarece $|x_n| = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ iar $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ este divergentă (vezi exemplul 1.1.2.2.)

Definiţia 1.1.2.3. O serie care este convergentă, dar nu este absolut convergentă, se numeşte *semiconvergentă*.

Seria armonică alternată este un exemplu de serie semi-convergentă.

Seriile semiconvergente au o proprietate ce le face puţin utilizabile, cunoscută sub numele de *teorema lui Riemann* : dacă seria de numere reale (f, g), $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$ este semiconvergentă, există o permutare σ a mulţimii $\mathbb{N}$, astfel încât seria generată de şirul $f \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $(f \circ \sigma)(n) = x_{\sigma(n)}$ să fie divergentă; pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ există o permutare τ a lui $\mathbb{N}$ astfel încât seria generată de şirul $f \circ \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $(f \circ \tau)(n) = x_{\tau(n)}$ să fie convergentă şi să aibă suma α.

Rezultă, de aici, că seriile semiconvergente au o comportare foarte diferită de cea a sumelor finite.

Spre deosebire de acestea, dacă într-o serie absolut convergentă modificăm ordinea termenilor, nici natura, nici suma seriei nu se schimbă (*teorema lui Dirichlet*)

Astfel, seriile absolut convergente au o comportare asemănătoare cu cea a sumelor finite; de aceea ele sunt cele mai des utilizate.

Studiul seriilor absolut convergente înseamnă de fapt studiul seriilor *cu termeni pozitivi*. Pentru asemenea serii se pot formula multe criterii care dau condiţii suficiente de convergenţă. Prezentăm în continuare pe cele mai importante.

B) Serii cu temeni pozitivi. Criterii de convergenţă

Teorema 1.1.2.5. O serie de numere reale şi pozitive este convergentă, dacă şi numai dacă, şirul sumelor ei parţiale este mărginit.

Teorema 1.1.2.6. *(criteriul comparaţiei)* Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ două serii cu termeni pozitivi astfel încât să existe $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

a) dacă $0 < l < \infty$ atunci cele două serii au aceeaşi natură;

b) dacă $l = 0$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă;

c) dacă $l = \infty$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este divergentă.

Teorema 1.1.2.7. *(criteriul rădăcinii al lui Cauchy)*

Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\sqrt[n]{x_n} \leq q$, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$ pentru o infinitate de indici, atunci seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este divergentă.

Corolar. Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă.
b) Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

Teorema 1.1.2.8. *(criteriul raportului, al lui d'Alembert)*

Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ să avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $q \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ atunci seria este divergentă.

Corolar. Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există $l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci seria este divergentă.

Observatia 1.1.2.5. Dacă $l = 1$ în corolarul teoremei 1.1.2.7. (sau 1.1.2.8.) nu se poate trage nici o concluzie asupra naturii seriei. Spre exemplu, să considerăm seriile $\sum_{n\geq 1} x_n$, $\sum_{n\geq 1} y_n$ unde $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Evident că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1$.

Seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă (vezi exemplul 1.1.2.2.). Seria $\sum_{n\geq 1} y_n$ este însă convergentă. (Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ şi, prin urmare, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$)

În situaţiile în care criteriul raportului nu poate decide natura seriei se poate folosi:

Teorema 1.1.2.9. *(criteriul lui Raabe - Duhamel)*

Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ şi $r > 1$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq r$, atunci seria este convergentă.

b) Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, atunci seria este divergentă.

Corolar. Fie $\sum_{n\geq 0} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Presupunem că există

$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$.

a) Dacă $l > 1$, atunci seria este convergentă.
b) Dacă $l < 1$, atunci seria este divergentă.

Exemplul 1.1.2.4. Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ se numeşte *serie armonică generală*. Este evident că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ pentru orice $\alpha > 0$, deci natura seriei nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului (şi nici cu criteriul rădăcinii). Dar

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\right] = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Se ştie din liceu că $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Folosind *criteriul cu şiruri* al limitei unei funcţii (de asemenea, cunoscut din liceu) deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, rezultă că:

$$l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha$$

Rezultă astfel că pentru $\alpha > 1$ seria armonică generală este convergentă, iar pentru $\alpha < 1$ este divergentă. Pentru $\alpha = 1$ se obţine seria armonică despre care s-a arătat anterior (vezi exemplul 1.1.2.2.) că este divergentă.

Teorema 1.1.2.10. *(criteriul integral al lui Cauchy)* Fie $f:[0, \infty)\to[0, \infty)$ o funcţie continuă, descrescătoare şi fie $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Seria cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$,

$F(n) = \int_0^n f(x)dx$ este mărginit.

Observaţia 1.1.2.6. Teorema rămâne valabilă şi în cazul în care $f: [a, \infty)\to\mathbb{R}^+$, unde $a > 0$.

Cu ajutorul acestui criteriu putem stabili foarte uşor natura seriei armonice generale (studiată în exemplul 1.1.2.4). Este suficient să considerăm funcţia $f: [1, \infty)\to\mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $\alpha>0$ şi să observăm că, pentru $\alpha \neq 1$, $F(n) = \int_1^n \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\alpha>1$, avem: $F(n) = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{\alpha-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, şirul F este mărginit, deci seria este convergentă. Dacă $\alpha<1$, avem:

$F(n) = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} F(n) = \infty$ deci şirul F nu este mărginit, deci seria este divergentă.

C) Serii alternate.

Pentru studiul unei serii care *nu este absolut convergentă* se poate folosi direct criteriul general al lui Cauchy (teorema 1.1.2.3.) sau următoarea teoremă care se demonstrează cu ajutorul acestuia.

Teorema 1.1.2.11. *(criteriul lui Abel)* Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale având şirul sumelor parţiale asociat mărginit. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale, descrescător şi convergent către zero. Atunci seria $\sum_{n\geq 0} a_n z_n$ este convergentă.

Corolar. *(criteriul lui Leibnitz pentru serii alternate)*

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale, descrescător şi convergent către zero. Atunci seria $\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ este convergentă. (o asemenea serie se numeşte *serie alternată*)

Exemplul 1.1.2.5. Seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}$, unde $\alpha > 0$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă pentru $0 < \alpha \leq 1$; pentru $\alpha > 1$ această serie este şi convergentă şi absolut convergentă (convergenţa se poate deduce din convergenţa absolută, sau, direct, cu criteriul lui Leibnitz)

D) Aproximarea sumei

Observaţia 1.1.2.7. Pentru o serie care s-a dovedit a fi convergentă, dar nu este posibil să-i determinăm suma, este important să putem evalua eroarea făcută, dacă se aproximează suma seriei cu o sumă parţială. Sunt situaţii în care se poate evalua uşor această eroare şi, prin urmare, se poate obţine suma seriei cu precizia dorită:

a) dacă $| x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p} | \leq y_n$ pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ atunci seria este convergentă (rezultă din teorema 1.1.2.3.). Se poate arăta că $| s_n - s | \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, inegalitate care poate fi considerată formulă de evaluare a erorii cu care se face aproximarea $s \approx s_n$ (vezi şi observaţia 1.1.1.4.).

b) dacă există $q \in (0, 1)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\sqrt[n]{| x_n |} \leq q$, atunci aplicând criteriul rădăcinii seriei $\sum_{n\geq 0}| x_n |$ se deduce că seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este absolut convergentă, deci şi convergentă. Se poate arăta că, pentru orice $n \geq n_0$, $| s_n - s | \leq \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

c) dacă există $q \in (0, 1)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q$, atunci aplicând criteriul raportului seriei $\sum_{n\geq 0}| x_n |$ se deduce că seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este absolut convergentă, deci şi convergentă. Se poate arăta că, pentru orice $n \geq n_0$, $| s_n - s | \leq | x_n |\cdot\frac{q}{1-q}$.

d) pentru o serie alternată $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1} a_n$ convergentă se poate arăta că:

$$0 < s_{2n} - s < a_{2n+1},\ 0 < s - s_{2n+1} < a_{2n+2}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deci, dacă aproximăm suma s a unei serii alternate ce satisface condiţiile criteriului lui Leibniz cu suma parţială de ordinul n, facem o eroare mai mică decât primul termen neglijat; eroarea este prin lipsă dacă n este impar şi prin adaos, dacă n este par.

1. ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE REALE

1.2 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1.2.1. Stabiliţi dacă următoarele şiruri sunt fundamentale:

a) $x_n = \dfrac{n+2}{3n+5}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

c) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

d) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}$

e) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Soluţii

a) $|x_{n+p} - x_n| = \dfrac{p}{(3n+3p+5)(3n+5)} < \dfrac{p}{3p(3n+5)} = \dfrac{1}{3(3n+5)}$ şi majorantul este un şir convergent la 0, al cărui termen general nu depinde de p. Rezultă că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este şir fundamental.

b) $|x_{n+p} - x_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+p}}$. Observăm că pentru $p = n$ obţinem $x_{2n} - x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Rezultă de aici că $|x_{2n} - x_n|$ nu tinde către 0, deci şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este şir fundamental.

c) $|x_{n+p} - x_n| = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \dfrac{1}{(n+p)^2} < \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \dfrac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p} < \dfrac{1}{n}$. Cum majorantul este un şir convergent la 0 şi nu depinde de p, rezultă că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir fundamental.

d) $|x_{n+p} - x_n| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}\right| \le$

$\le \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

e) Deoarece $x_n = \dfrac{n^2}{n+1} = \dfrac{n^2-1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} = n - 1 + \dfrac{1}{n+1} > n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru orice $M>0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n - 1 > M$ (de exemplu $n = [M] + 2$), prin urmare există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > M$ deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este majorat, deci este nemărginit. Prin urmare, nu este fundamental.

Exerciţiul 1.2.2. Stabiliţi dacă următoarele şiruri sunt convergente:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2+2}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

c) $x_n = \dfrac{2n \cdot n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

d) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

e) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

f) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Soluţii.

a) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit: $0 < \frac{n+1}{n^2+2} < \frac{n+1}{n^2} \le \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \le 1$, pentru orice $n \ge 2$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{2}{3}$, deci $x_n \in (0, 1)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescator:

$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} - \frac{n+1}{n^2+2} = \frac{n+2}{n^2+2n+3} - \frac{n+1}{n^2+2} =$

$= \frac{-n^2-3n+1}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} < 0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

b) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este mărginit (vezi exerciţiul precedent), deci nu este convergent.

c) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Într-adevăr, aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele $1, 2, \ldots, n$ obţinem $\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} > \sqrt[n]{n!}$, adică $\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}$ sau $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; înmulţind inegalitatea cu $\frac{2^n}{n^n}$, obţinem $x_n < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 3$, pentru orice $n \ge 2$. Cum $x_1 = 2 < 3$, rezultă că $x_n < 3$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Evident, $x_n > 0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deci $x_n \in (0, 3)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

Deoarece $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{2^n\cdot n!} = \dfrac{2}{(n+1)^n}\cdot n^n =$

$= 2\cdot\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} < 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ deducem că şirul este strict descrescător. Rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

d) Şirul este fundamental (vezi exerciţiul precedent), iar ($\mathbb{R}$, d) este spaţiu metric complet (vezi teorema 1.1.1.1.), deci şirul este convergent.

Să observăm că $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, deci şirul este strict crescător. Deoarece $1 < 1 + \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k^2} = x_n <$

$1 + \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right) = 1 + \left(1-\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right) = 2 - \dfrac{1}{n} < 2$,

adică $x_n\in(1, 2)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că şirul este şi mărginit, deci este convergent.

e) Şirul este fundamental (vezi exerciţiul precedent), iar $\mathbb{R}$ în raport cu distanţa euclidiană este spaţiu metric complet (vezi teorema 1.1.1.1.), deci şirul este convergent.

Să observăm că, spre deosebire de exerciţiul precedent, acest şir nu este monoton, deoarece diferenţa $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)}$ nu păstrează semn constant pe $\mathbb{N}$, deci nu se poate aplica teorema de convergenţă a şirurilor monotone.

f) Şirul nu este fundamental (vezi exerciţiul precedent). Din teorema 1.1.1.1. deducem că acest şir nu este convergent.

Exerciţiul 1.2.3. Aproximaţi limita şirului $x_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k!)}{k(k+1)}$ cu două zecimale exacte.

Soluţie. Despre acest şir s-a demonstrat că este fundamental, deci este convergent. Am arătat că $|x_{n+p} - x_n| < \dfrac{1}{n+1}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă notăm $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, atunci $|x - x_n| \le \dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Pentru ca în aproximarea $x \approx x_n$ să avem două zecimale exacte este suficient ca

$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{10^2}$.

Prin urmare x_{100} aproximează pe x cu două zecimale exacte.

Exerciţiul 1.2.4. Folosind principiul contracţiei să se calculeze rădăcina ecuaţiei $x^3 + 4x - 1 = 0$ cu 4 zecimale exacte.

Soluţie. Ecuaţia are o singură rădăcină reală situată în intervalul [0, 1] care este spaţiu metric complet. Ecuaţia se poate scrie sub forma

$$x = \frac{1}{x^2+4} \overset{\text{not}}{=} f(x)$$

Pe această mulţime f este o contracţie cu coeficientul $\dfrac{1}{8}$ pentru că $|f'(x)| =$

$= \left|\frac{-2x}{(x^2+4)^2}\right| < \frac{2}{4\cdot 4} = \frac{1}{8}$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Alegem $x_0 = 0$. Atunci $x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4}$, $\delta = \left|\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{4}$. Rezultă că $\frac{\delta}{1-c}\cdot c^n = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{8^n} < 10^{-4}$ pentru $n \geq 4$. Deci x_4 este aproximarea rădăcinii cu patru zecimale exacte.

Exercițiul 1.2.5. Determinați limitele extreme ale șirurilor:

a) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $x_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluții. a) Prezența lui $(-1)^n$ sugerează considerarea următoarelor două subșiruri:

$$x_{2m} = \frac{1+(-1)^{2m}}{2} + (-1)^{2m}\cdot\frac{2m}{4m+1} = 1 + \frac{2m}{4m+1},\ m \in \mathbb{N}$$

$$x_{2m+1} = \frac{1+(-1)^{2m+1}}{2} + (-1)^{2m+1}\cdot\frac{2m+1}{2(2m+1)+1} = 0 - \frac{2m+1}{4m+3} =$$

$$= -\frac{2m+1}{4m+3},\ m \in \mathbb{N}$$

Evident, $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m+1} = -\frac{1}{2}$

Prin urmare, mulțimea punctelor de acumulare a acestui șir este $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$. Deci $\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$, $\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$.

b) Analog, $x_{2m} = \frac{(2m)^2}{2m} = 2m$, $m \in \mathbb{N}^*$

$$x_{2m+1} = \frac{(2m+1)^{2\cdot(-1)}}{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)^3},\ m \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m} = \infty$ și $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m+1} = 0$, deducem că $\underline{\lim}\, x_n = 0$ și $\overline{\lim}\, x_n = \infty$.

Exercițiul 1.2.6. Să se studieze natura seriilor următoare și să se calculeze suma în caz de convergență:

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n}{3^n}$; c) $\sum\limits_{n\geq 1}\ln\frac{n+1}{n}$.

Soluții.

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Prin urmare, seria dată este convergentă și suma sa este $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = 1$

b) $x_n = \frac{n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ deci $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}$.

$$s_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{3^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right)}_{n-1 \text{ termeni}} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{3^n} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right)}_{n \text{ termeni}}.$$

Atunci,

$$s_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{3^n},$$

adică

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-k}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \cdot \frac{\frac{1}{3^{n-k}} \cdot \frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\left(1 - \frac{1}{3^{n-k+1}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{3}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^{n+1}}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{\frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{n}{3^{n+1}}\right] \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = 0$ şi $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{3^{n+1}} = 0$, deducem că $\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{3}{4}$, deci seria dată este convergentă şi suma sa este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$.

c) $x_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln (n+1) - \ln n$.

$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă că $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) = \infty$, deci şirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ al sumelor parţiale este divergent.

Rezultă că seria $\sum_{n \geq 1} \ln \frac{n+1}{n}$ este divergentă. Să observăm că $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ deci această condiţie este necesară dar nu şi suficientă pentru convergenţa unei serii.

Exercițiul 1.2.7. Să se studieze natura seriilor următoare:

a) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$; b) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}$, unde a > 0

c) $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot a^n$, unde a > 0; d) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{a^n\cdot n^n}{n!}$, unde a > 0

e) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...(2n)}$

Soluții.

a) Deoarece $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{3/2}\cdot\sqrt{7n}}{n^2+3n+5} = \sqrt{7}$ deducem că seria $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ este convergentă (vezi teorema 1.1.2.6)

b) Pentru a > 1, seria $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{a^n}$ este convergentă (serie geometrică cu rația $\dfrac{1}{a}$). Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}}{\dfrac{1}{a^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n\cdot\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}\cdot\dfrac{a^n}{a^{n+1}-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}\cdot\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a^n}} = 0$, din teorema 1.1.2.6. deducem că seria dată este convergentă.

Pentru a = 1 seria devine $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ iar aceasta este convergentă (ex. 1.3.6.a)

Pentru 0 < a < 1 se poare folosi ușor teorema 1.1.2.6. folosind ca termen de comparație seria armonică $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ despre care se știe că este divergentă.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n(1+a+a^2+...+a^n)}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a+a^2+...+a^n} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-a}{1-a^{n+1}} = 1 - a$ (căci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$ deoarece $a\in(0, 1)$)

Deoarece $0 < 1 - a < \infty$ rezultă că cele două serii au aceeași natură. Rezultă astfel că, pentru $a\in(0, 1)$ seria dată este divergentă

c) $x_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot a^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, a > 0. Prezența lui *n* la exponent sugerează aplicarea criteriului rădăcinii:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot a = a\cdot e.$$

Prin urmare, dacă $0 < a < \frac{1}{e}$, avem $a\cdot e < 1$, deci seria este convergentă, iar dacă $a > \frac{1}{e}$, atunci $a \cdot e > 1$, deci seria este divergentă.

Rămâne de studiat cazul $a = \frac{1}{e}$. În acest caz, $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ rezultă $e^n < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+n}$, de unde

$x_n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \frac{1}{e} \neq 0$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ de unde obţinem că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

d) $x_n = \frac{a^n \cdot n^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n \cdot n^n} = a \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a \cdot e$.

Dacă $0 < a < \frac{1}{e}$, avem $a \cdot e < 1$, de unde, cu criteriul raportului, obţinem că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

Dacă $a > \frac{1}{e}$, atunci $a \cdot e > 1$ de unde deducem că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

Rămâne de studiat cazul $a = \frac{1}{e}$.

Pentru $a = \frac{1}{e}$ avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind din nou inegalitatea $e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ obţinem $\frac{x_{n+1}}{x_n} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{n}{n+1}$ adică $(n+1)x_{n+1} > nx_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $nx_n > 1 \cdot x_1$ adică $x_n > x_1 \cdot \frac{1}{n}$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k > x_1 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Cum $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă deducem (vezi teorema 1.1.2.5.) că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

e) Punând $x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ obţinem:

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1$, deci nu putem utiliza criteriul raportului. Deoarece

$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) = n \cdot \frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ < 1, obţinem, cu criteriul Raabe Duhamel, că $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

Exerciţiul 1.2.8. Să se aproximeze sumele seriilor următoare cu o eroare mai mică decât 10^{-2}:

a) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^n}$, b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^n}$, c) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n!)^2}$

Soluţii. a) Dacă notăm $x_n = \frac{1}{n^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ atunci $\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{n}\leq\frac{1}{2}$, pentru orice $n \geq 2$. Atunci rezultă că, pentru orice $n \geq 2$ are loc $|s - s_n| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$ unde s este suma seriei, iar s_n este suma parţială de ordinul n.

Deci $|s - s_n| \leq \frac{1}{2^n}$ pentru orice $n \geq 2$. Pentru ca s_n să aproximeze s cu o eroare mai mică decât 10^{-2} este suficient să determinăm cel mai mic rang n care satisface inegalitatea $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^2}$.

Se obţine $n = 7$ deci $s \approx s_7 = 1.291285935$ cu două zecimale exacte.

b) Deoarece $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{10^2}$ pentru orice $n \geq 4$ rezultă că

$0 < s - s_3 < \frac{1}{4^4} < \frac{1}{10^2}$, $0 < s_4 - s < \frac{1}{5^5} < \frac{1}{10^2}$. Deci $s_3 = -7870370370$ aproximează pe s prin lipsă, iar $s_4 = -7831307870$ prin adaos, ambele cu o eroare mai mică decât 10^{-2}.

c) Dacă notăm $x_n = \frac{1}{(n!)^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$ atunci $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq 1$ de unde rezultă evaluarea:

$0 < s - s_n \leq \frac{1}{(n!)^2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$, adică $0 < s - s_n \leq \frac{1}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{3}$,pentru orice $n \geq 1$.

Cum $\frac{1}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{3} < 10^{-2}$ pentru orice $n \geq 3$ rezultă că $s \approx s_3 = 1,277777778$.

2 SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTARI IN SERIE TAYLOR

2.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

2.1.1. Serii de puteri reale.

Definiţia 2.1.1.1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Se numeşte *serie de puteri reale* cu coeficienţii a_n, $n\in\mathbb{N}$, seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$, unde

$f_n(x) = a_n x^n$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

Principalele rezultate privind mulţimea de convergenţă a unei asemenea serii, precum şi proprietăţile sumei, (datorate matematicienilor Abel, Cauchy, Hadamard) sunt concentrate în teorema următoare.

Teorema 2.1.1.1. Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $x\in\mathbb{R}$ o serie de puteri reale, cu coeficienţii daţi a_n, $n\in\mathbb{N}$ şi $r \geq 0$ definit prin:

$$r = \begin{cases} 0 & \text{, daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} & \text{, daca } 0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < \infty \\ \infty & \text{, daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Atunci:

a) dacă r = 0, singurul punct de convergenţă al seriei este $x = 0$;
b) dacă r > 0, seria este absolut convergentă pe intervalul (-r, r) şi este divergentă pentru $|x| > r$;
c) dacă $x = r$ este punct de convergenţă al seriei, atunci suma sa este continuă în acest punct; analog pentru $x = -r$;
d) dacă r > 0, suma seriei admite derivate de orice ordin în intervalul (-r, r) şi aceste derivate se pot calcula prin derivare termen cu termen;
e) dacă r > 0, seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a, b]\subset(-r, r)$.

Observaţia 2.1.1.1. a) Numărul r se numeşte *rază de convergenţă* a seriei de puteri. Formula de calcul pentru r se numeşte *formula Cauchy-Hadamard*.

b) Se poate demonstra că, dacă $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ există, atunci există şi $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ şi cele două limite sunt egale. Prin urmare, dacă există $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, atunci $\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (cu convenţia $\frac{1}{0} = \infty$ şi $\frac{1}{\infty} = 0$).

2.1.2. Serii Taylor. Dezvoltări în serie.

Definiţia 2.1.2.1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale şi $n\in\mathbb{N}$, fixat. Se numeşte *serie Taylor, cu coeficienţii* a_n, $n\in\mathbb{N}$, *centrată în* x_0, seria de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$, unde $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

Este evident că orice serie de puteri este o serie Taylor centrată în punctul $x_0 = 0$. De asemenea, dacă $x_0 \in\mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, printr-o translaţie $x - x_0 = y$, o serie Taylor centrată în x_0 se transformă într-o serie de puteri, centrată în origine. Din acest motiv, teorema 2.1.3.1. de la serii de puteri poate fi extinsă uşor la serii Taylor. Se obţine astfel:

Teorema 2.1.2.1. Fie $\sum_{n\geq 0} f_n$ o serie Taylor cu coeficienţii a_n, $n\in\mathbb{N}$, centrată în x_0 şi $r \geq 0$ definit prin:

$$r = \begin{cases} 0 & ,\text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty \\ \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} & ,\text{daca } 0 < \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < \infty \\ \infty & ,\text{daca } \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}$$

Atunci:

a) dacă r = 0, singurul punct de convergenţă al seriei este $x = x_0$;
b) dacă r > 0, seria este absolut convergentă pe intervalul $(x_0 - r, x_0 + r)$ şi divergentă pentru $|x - x_0| > r$;
c) dacă r > 0, seria este uniform convergentă pe orice interval $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$;
d) dacă $x = x_0 + r$ este punct de convergenţă al seriei, atunci suma sa este continuă în acest punct; analog, pentru $x = x_0 - r$;
e) dacă r > 0, suma seriei admite derivate de orice ordin în intervalul $(x_0 - r, x_0 + r)$ şi aceste derivate se pot calcula prin derivare termen cu termen;
f) dacă r > 0, seria poate fi integrată termen cu termen pe orice interval $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$;

Rămâne valabilă observaţia referitoare la determinarea razei de convergenţă r.

În teorema precedentă, fiind daţi coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$ şi punctul fixat $x_0 \in \mathbb{R}$, se deduc proprietăţi ale sumei seriei. Problema poate fi pusă însă şi invers: fiind dată suma seriei şi punctul fixat $x_0 \in \mathbb{R}$, să se determine coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$. Apare, astfel, problema găsirii unei serii Taylor a cărei sumă să fie o funcţie dată, funcţie care se va numi dezvoltabilă în serie Taylor.

Definiţia 2.1.2.2. Fie I un interval deschis al axei reale, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Funcţia f se numeşte *dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului* x_0, dacă există şirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât:

- $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$, $\varepsilon \le r$, unde r este raza de convergenţă a seriei Taylor cu coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$, centrată în x_0 ;
- pentru orice $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ avem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Apar în mod natural două probleme:

- În ce condiţii o funcţie f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul unui punct dat?
- Cum se pot calcula coeficienţii a_n $n \in \mathbb{N}$,dacă se cunoaşte funcţia f?

Referitor la problema a doua, ţinând seama de teorema 2.1.4.1., e), avem:

Teorema 2.1.2.2. Fie $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ fixat. Dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, atunci f admite derivate de orice ordin în x_0 şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}_{(x_0)}$.

Observaţia 2.1.2.1. Din această teorema rezultă că existenţa derivatelor de orice ordin într-o vecinătate a lui x_0 este o condiţie necesară pentru ca o funcţie să fie dezvoltabilă în serie Taylor. Ea nu este însă şi suficientă.

Exemplul 2.1.4.1. Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ are derivate de orice ordin pe $\mathbb{R}$, $f_{(0)}^{(n)} = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Ea nu este însă dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului $x_0 = 0$, pentru că, dacă ar fi, ar rezulta

$a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ şi, prin urmare, $f(x) = 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, ceea ce este fals.

Observaţia 2.1.2.2. Din teorema precedentă rezultă că, dacă f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, există o singură serie Taylor a cărei sumă să fie f pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ şi anume, seria cu coeficienţii $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}_{(x_0)}$, $n \in \mathbb{N}$. Această serie se mai numeşte *seria Taylor asociată funcţiei f în jurul punctului* x_0. Prin urmare, referitor la prima problemă formulată anterior, este suficient să stabilim în ce condiţii o funcţie indefinit derivabilă (are derivate de orice ordin) este suma seriei Taylor asociate pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Pentru aceasta, este deosebit de utilă următoarea:

Teorema 2.1.2.3. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de $n+1$ ori derivabilă pe intervalul I, $x_0 \in I$ fixat. Atunci, pentru orice $x \in I$, există cel puţin un punct ξ (depinzând de x) situat între x_0 şi x, astfel încât:

$$f(x)= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Aceasta este *formula lui Taylor* pentru o funcţie reală, de $n+1$ ori derivabilă pe I cu restul $R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ în sensul lui Lagrange. Polinomul:

$$T_n(x)= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se numeşte *polinomul Taylor de gradul n* asociat funcţiei f şi punctului fixat x_0.

Observaţia 2.1.2.3. Coeficienţii a_n, $n \in \mathbb{N}$ obţinuţi în teorema 2.1.4.2. coincid cu cei din formula lui Taylor pentru funcţia f şi punctul x_0. Deci, polinomul lui Taylor $T_n(x)$ asociat funcţiei f şi punctului x_0 este suma parţială de ordin n a seriei Taylor asociate funcţiei f în jurul punctului x_0 şi, prin urmare, referitor la prima problemă, obţinem acum:

Teorema 2.1.2.4. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă (are derivate de orice ordin) pe o vecinătate a punctului fixat $x_0 \in I$. Atunci funcţia f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, dacă şi numai dacă, există o vecinătate V a punctului x_0, încât, pentru orice $x \in V$ avem $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Cu ajutorul acestei teoreme se obţine uşor următorul criteriu, utilizat de obicei în practică:

Teorema 2.1.2.5. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe o vecinătate V a punctului fixat $x_0 \in I$. Presupunem că există $M > 0$ astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in V$, să avem $|f_{(x)}^{(n)}| \le M$ (funcţia f are derivatele egal mărginite pe V). Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul punctului x_0, adică $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{(x_0)}^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$, pentru orice $x \in V$.

2 SERII DE PUTERI REALE. DEZVOLTARI IN SERIE TAYLOR

2.2. Exerciţii rezolvate.

Exerciţiul 2.2.1. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriilor de puteri: a) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$;

b) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soluţie.

a) Raza de convergenţă este: r = $\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|}}$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ = 1.

Pentru x = -1 obţinem $f_n(-1) = (-1)^{2n+1}\cdot\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Seria generată de şirul numeric $\{f_n(-1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ are aceeaşi natură cu seria armonică, deci este divergentă. Pentru $x = 1$, obţinem $f_n(1) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Acest şir generează seria armonică alternată care, conform criteriului lui Leibniz, este convergentă. Mulţimea de convergenţă a seriei de puteri considerate este deci (-1, 1].

Fie $S: (-1, 1] \to\mathbb{R}$ $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$.

Pentru orice $x\in(-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$.

Din $S'(x) = \frac{1}{1+x}$, $x\in(-1, 1)$ şi $S(0) = 0$ rezultă $S(x) = ln(1+x)$ pentru orice $x\in(-1, 1)$. Ţinând seama de observaţia de mai sus, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} = S(1) = \lim\limits_{x\to 1} S(x) = \lim\limits_{x\to 1} ln(1+x) = ln\ 2$.

Deci, suma seriei armonice alternate este *ln 2*. Acest rezultat permite aproximarea numărului *ln 2* prin numere raţionale şi evaluarea erorii făcute.

b) Raza de convergenţă este dată de : r = $\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[m]{|a_m|}}$ unde

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{daca } m = 2n \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{daca } m = 2n+1 \end{cases}.$$

Deci $\sqrt[m]{|a_m|} = \begin{cases} 0, & \text{daca } m = 2n \\ \frac{1}{\sqrt[m]{m}}, & \text{daca } m = 2n+1 \end{cases}$. Deoarece $\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{m} = 1$, şirul $(\sqrt[m]{|a_m|})_{m\in\mathbb{N}}$ are punctele de acumulare 0 şi 1. Prin urmare $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\sqrt[m]{|a_m|} = 1$, deci $r = 1$.

Pentru $x = -1$ se obţine seria numerică $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ care este convergentă (se aplică criteriul lui Leibniz).

Pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}$ care este de asemenea convergentă.

Prin urmare, mulţimea de convergenţă este $A = [-1, 1]$.

Fie acum $S : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Aplicând teorema de derivare termen cu termen, deducem că, pentru orice $x\in(-1, 1)$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^{2})^{n} = \frac{1}{1+x^{2}}$. Deci $S(x) = arctg\ x + C$. Din $S(0) = 0$ rezultă $S(x) = arctg\ x$ pentru orice $x\in(-1, 1)$. Deoarece S este continuă în 1, deducem acum că $S(1) = \lim_{x\to 1, x<1} S(x) = \frac{\pi}{4}$, rezultat ce permite aproximarea numărului π prin numere raţionale şi evaluarea erorii făcute. Analog se obţine $S(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Exerciţiul 2.2.2. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei:

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n}\cdot\frac{n+1}{n^{2}+n+1}\cdot\left(\frac{x^{2}-2}{1-2x^{2}}\right)^{n},\ x^{2}\neq\frac{1}{2}.$$

Soluţie.

Dacă se notează $\frac{x^{2}-2}{1-2x^{2}} = y$ se obţine o serie de puteri cu coeficienţii $a_n = (-1)^n\cdot\frac{n+1}{n^{2}+n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Raza de convergenţă a acestei serii de puteri este $r = 1$ deoarece $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. Mulţimea de convergenţă a seriei $\sum_{n\geq 0}a_n y^n$ este [-1, 1]. Mulţimea de convergenţă a seriei date se obţine acum rezolvând $-1 \leq \frac{x^{2}-2}{1-2x^{2}} \leq 1$, de unde rezultă

$x\in(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Exerciţiul 2.2.3. Să se arate că funcţiile $f(x) = sin\ x$, $g(x) = cos\ x$ şi $h(x) = e^x$ $x\in\mathbb{R}$ sunt dezvoltabile în serie de puteri pe $\mathbb{R}$ şi să se determine seriile corespunzătoare.

Soluţie.

Prin inducţie se arată că $f^{(n)}(x) = sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$,

$g^{(n)}(x) = cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ şi $h^{(n)}(x) = e^x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}$.

Deoarece $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ şi $|g^{(n)}(x)| \leq 1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}$ rezultă că f şi g sunt dezvoltabile în serie de puteri pe $\mathbb{R}$.

Pentru orice $a > 0$ şi orice $x\in[-a, a]$ şi $n\in\mathbb{N}$ avem $0 < h^{(n)}(x) \leq e^a$, deci h este dezvoltabilă în serie de puteri pe orice interval de forma $[-a, a]$ deci este dezvoltabilă pe $\mathbb{R}$.

Pentru $n = 2m$ avem $f^{(n)}(0) = sin\ m\pi = 0$, $g^{(n)}(0) = cos\ m\pi = (-1)^m$, iar pentru $n = 2m+1$, $f^{(n)}(0) = sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m$ şi $g^{(n)}(0) = 0$.

Rezultă dezvoltările:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cum $h^{(n)}(0) = e^0 = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ rezultă dezvoltarea

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.2.4. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia:

$$f(x) = (1 + x)^\alpha \text{ cu } x > -1,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluţie.

Prin inducţie se demonstrează că

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) \cdot (1 + x)^{\alpha - n}, \text{ deci}$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1).$$

Se obţine dezvoltarea

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$$

pentru $|x| < 1$.

Exerciţiul 2.2.5. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie.

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Pentru $|x| < 1$ avem: $f'(x) = (1 + x^2)^{-1/2} =$

$= 1 - \dfrac{1}{2 \cdot 1!}x^2 + \ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} + \ldots$ de unde, prin integrare, rezultă $f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \dfrac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$ pentru orice $x \in (-1, 1)$.

Exerciţiul 2.2.6. Să se calculeze $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ cu şase zecimale exacte.

Soluţie.

În dezvoltarea $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ punând $x = -\dfrac{1}{2}$, obţinem

$\dfrac{1}{\sqrt{e}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$. Cum într-o serie alternată eroarea este inferioară primului termen neglijat, din $\dfrac{1}{2^n n!} < \dfrac{1}{10^6}$, prin încercări se obţine $n = 7$, deci

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 1 - \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{4\cdot 2!} - \frac{1}{8\cdot 3!} + \frac{1}{16\cdot 4!} - \frac{1}{32\cdot 5!} + \frac{1}{64\cdot 6!} = \ldots$$

Exercițiul 2.2.7. Să se calculeze cu trei zecimale exacte $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

Soluție.

Din $\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$, obținem

$$\int_0^1 \cos x^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{4n+1}$$

Calculând suma primilor cinci termeni prin transformarea lor în fracții zecimale, prin lipsă și prin adaos acolo unde transformarea nu se face exact, cu patru zecimale, obținem

0,9035 < $\int_0^1 \cos x^2 dx$ < 0,9036, deci $\int_0^1 \cos x^2 dx$ este aproximată cu trei zecimale exacte prin 0,903.

3 FUNCTII CONTINUE

3.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

3.1.1. Spaţiul euclidian $\mathbb{R}^p$

Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$ fixat, se defineşte

$$\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{de } p \text{ ori}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) : x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}\}$$

De exemplu, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Mulţimea $\mathbb{R}^p$ poate fi înzestrată cu o structură algebrică de *spaţiu vectorial real*, definind adunarea şi înmulţirea cu scalari prin:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) + (y_1, y_2, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)$$
$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_p) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_p)$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

În timp ce mulţimea numerelor reale este total ordonată, între elementele mulţimii $\mathbb{R}^p$ nu poate fi definită o relaţie de ordine totală compatibilă cu structura algebrică, de aceea unele proprietăţi ale funcţiilor reale de o variabilă reală (legate de monotonie, spre exemplu) nu se pot enunţa în cazul funcţiilor reale de mai multe variabile reale (funcţii definite pe o parte $A \subseteq \mathbb{R}^p$ cu valori în $\mathbb{R}$).

Structura de bază însă cu care trebuie să fie dotate mulţimile pentru studiul caracteristic analizei matematice, bazat pe noţiunea de limită, este cea de spaţiu topologic, în care se poate exprima faptul că două elemente sunt sau nu *apropiate*, cu ajutorul noţiunii de vecinătate, în cazul general, sau cu ajutorul noţiunii de metrică (sau distanţă) în cazurile uzuale.

Definiţia 3.1.1.1. Dacă X este o mulţime nevidă astfel încât, pentru fiecare $x \in$ X, să poată fi evidenţiată o familie $\mathcal{V}(x)$ de submulţimi ale lui X cu proprietăţile:

[V_1] oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$;

[V_2] dacă $U, V \in \mathcal{V}(x)$ atunci $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$;

[V_3] dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ şi $V \subseteq A$ atunci $A \in \mathcal{V}(x)$;

[V_4] oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$ există $W \in \mathcal{V}(x)$ încât $V \in \mathcal{V}(y)$ pentru orice $y \in W$,

atunci se spune că pe X este definită o *structură topologică (sau o topologie)* . Mulţimea X se numeşte în acest caz *spaţiu topologic*, iar familia $\mathcal{V}(x)$ se numeşte *sistem de vecinătăţi ale punctului x*.

Definiţia 3.1.1.2. Fie X o mulţime nevidă, arbitrară. Funcţia d : X x X $\rightarrow \mathbb{R}$ satisfăcând proprietăţile:

[D_1] $d(x, y) \geq 0$ pentru orice $x, y \in$ X; $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$

[D_2] $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in$ X

[D_3] $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in$ X

se numeşte *metrică* (distanţă) pe X, iar perechea (X, d) se numeşte *spaţiu metric*.

Dacă (X, d) este un spaţiu metric, $x \in$ X, $r \in \mathbb{R}$, $r>0$, atunci mulţimea:

$$S(x, r) = \{y \in X: d(y, x) < r\}$$

se numeşte *sferă deschisă cu centrul în x şi raza r.*

Teorema 3.1.1.1. Dacă (X, d) este un spaţiu metric, pentru fiecare $x \in$ X, familia $\mathcal{V}(x) = \{V \subset X: \exists\ r>0, S(x, r) \subset V\}$ formează un sistem de vecinătăţi ale punctului x; deci orice spaţiu metric este în mod natural un spaţiu topologic.

În plus, pentru orice $x \in$ X, $\mathcal{V}(x)$ are două proprietăţi remarcabile:

1) Dacă $x, y \in$ X, $x \neq y$ atunci există $U \in \mathcal{V}(x)$, $V \in \mathcal{V}(y)$ astfel încât $U \cap V = \emptyset$ (proprietatea de separare)
2) Există $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{V}(x)$ astfel încât:

- oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(x)$ există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ încât $V_{n_0} \subset V$
- dacă $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n \leq m$ atunci $V_n \supset V_m$ (această proprietate este cunoscută sun numele de *prima axiomă a numărabilităţii*)

Aceste proprietăţi permit rezolvarea unor probleme mari (unicitatea limitei, caracterizarea limitei şi continuităţii unei funcţii cu ajutorul şirurilor, etc) la nivelul spaţiilor metrice, la fel ca în cazul axei reale.

Observaţia 3.1.1.1. Structura de spaţiu metric pe X **nu** presupune existenţa unei structuri algebrice pe X.

Revenind la $\mathbb{R}^p$ care este înzestrat cu o structură algebrică pe spaţiu vectorial real, putem defini în mod natural o structură de spaţiu metric (deci o structură topologică) utilizând două noţiuni particulare importante, produsul scalar şi norma, care se definesc numai în spaţii vectoriale.

Definiţia 3.1.1.3. *Produsul scalar euclidian* între elementele lui $\mathbb{R}^p$ este definit prin:

$$<x, y> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_py_p$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.

Norma euclidiană pe $\mathbb{R}^p$ este generată de produsul euclidian:

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.

Distanţa euclidiană este generată de norma euclidiană:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_p - y_p)^2}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.

Se demonstrează uşor că d satisface proprietăţile $[D_1]$, $[D_2]$, $[D_3]$ din definiţia 3.1.1.2., deci $(\mathbb{R}^p, d)$ este spaţiu metric şi, prin urmare, spaţiu topologic; sistemul de vecinătăţi ale fiecărui punct din $\mathbb{R}^p$ se defineşte ca în teorema 3.1.1.1.

Observaţia 3.1.1.2. a) Pentru $p = 1$ avem $\|x\| = |x|$, distanţa euclidiană este $d(x, y) = | x - y |$, iar pentru $\varepsilon > 0$ şi $x_0 \in \mathbb{R}$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}, | x - x_0 | < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

b) Pentru $p = 2$, dacă $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avem $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ care reprezintă lungimea segmentului ce uneşte punctele $O(0, 0)$ şi $A(x, y)$; distanţa euclidiană este:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$

iar pentru $\varepsilon > 0$ şi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixat,

$$S((x_0, y_0), \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

este interiorul cercului cu centrul în (x_0, y_0) şi raza ε, adică discul cu centrul în (x_0, y_0) şi raza ε.

c) Pentru $p = 3$, avem $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, iar distanţa euclidiană este:

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

pentru $\varepsilon > 0$ şi $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixat,

$$S((x_0, y_0, z_0), \varepsilon) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

este interiorul sferei geometrice cu centrul în (x_0, y_0, z_0) şi raza ε.

3.1.2. Şiruri în $\mathbb{R}^p$.

Definiţia 3.1.2.1. Se numeşte *şir de elemente din* $\mathbb{R}^p$ orice funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$; pentru orice $n \in \mathbb{N}$, termenul de rang n, $x_n = f(n) \in \mathbb{R}^p$, deci este de forma $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^p)$ unde $x_n^1, x_n^2, \ldots x_n^p \in \mathbb{R}$. Pentru fiecare $k = 1, 2, ..p$ fie $f_k: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f_k(n) = x_n^k$. Şirurile $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de numere reale se numesc *şiruri componente ale şirului f.*

Considerând $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu metrica euclidiană, se pot defini, la fel ca pentru şirurile de numere reale, noţiunile de punct limită, punct de acumulare, şir convergent, şir fundamental.

Definiţia 3.1.2.2. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$; $f(n) = x_n$ un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$. Şirul f se numeşte *convergent* dacă există $x \in \mathbb{R}^p$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ încât, oricare ar fi $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Elementul x se numeşte *punct limită* pentru şirul f. În caz contrar, şirul f se numeşte *divergent*. Şirul f se numeşte *şir fundamental* (sau şir Cauchy) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ încât, dacă $n, m \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ atunci $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sau, echivalent, $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$ şi orice $p \in \mathbb{N}$.

Teorema următoare stabileşte faptul că studiul şirurilor din $\mathbb{R}^p$, $p>1$ se reduce la studiul şirurilor din $\mathbb{R}$ şi că $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu distanţa euclidiană este un spaţiu metric complet.

Teorema 3.1.2.1. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$, $f(n) = x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^p)$ un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$. Pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, p$ fie $f_k: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f_k(n) = x_n^k$.

a) Şirul f este convergent şi are limita $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in \mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă şirurile componente $f_1, f_2, \ldots f_p$ sunt convergente şi $x^k = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^k$, $k = 1,2,\ldots,p$

b) Şirul f este şir fundamental dacă şi numai dacă toate şirurile componente sunt şiruri fundamentale.

c) Şirul f este convergent dacă şi numai dacă el este şir fundamental, deci $\mathbb{R}^p$ în raport cu distanţa euclidiană este spaţiu metric complet.

Observaţia 3.1.2.1. a) Din această teoremă deducem că limita unui şir convergent din $\mathbb{R}^p$ se calculează pe componente.

De exemplu, şirul $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^2$, $f(n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n+1}{n+2}\right)$ converge către (0, 1).

b) În $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$ nu se pot defini convenabil şiruri monotone, ca în cazul şirurilor de numere reale, deoarece în $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$ nu se poate introduce o relaţie de ordine totală compatibilă cu structura algebrică.

3.1.3. Limita unei funcţii de mai multe variabile

Este cunoscută, din liceu, noţiunea de limită a unei funcţii reale de o variabilă reală într-un punct de acumulare al domeniului său de definiţie. Prezentăm acum această noţiune pentru funcţii definite pe o parte $A \subseteq \mathbb{R}^p$ cu valori în $\mathbb{R}$. Este necesar să precizăm, mai întâi, noţiunea de punct de acumulare al unei mulţimi $A \subseteq \mathbb{R}^p$. Acest lucru este posibil la fel ca în
$A \subseteq \mathbb{R}$ deoarece cunoaştem sistemul de vecinătăţi ale fiecărui punct din $\mathbb{R}^p$.

Definiţia 3.1.3.1. Considerăm $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu metrica euclidiană.
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^p$ arbitrare. Elementul x se numeşte *punct de acumulare* pentru mulţimea A, dacă oricare ar fi $U \in \mathcal{V}(x)$ avem $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale mulţimii A se notează A'.

Definiţia 3.1.3.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, $l \in \mathbb{R}$, $a \in A'$. Elementul l se numeşte *limita funcţiei f în punctul a* dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ avem $f(x) \in V$. Se notează $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Observaţia 3.1.3.1. a) Deoarece $a \in A'$, $(U \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ oricare ar fi $U \in \mathcal{V}(a)$. Deoarece există elemente ale mulţimii A oricât de „aproape" de a, iar funcţia f ia în acestea valori oricât de „aproape" de l. De aceea, spunem că l este limita funcţiei f când x „tinde" la a, „se apropie" oricât de mult de a. Este evident că nu are sens să ne punem problema limitei unei funcţii într-un punct care nu este punct de acumulare pentru domeniul său de definiţie.

b) Definiţia punctului de acumulare al unei mulţimi, precum şi definiţia limitei unei funcţii într-un punct pot fi extinse, cu aceeaşi formulare, la cazul spaţiilor topologice oarecare deoarece utilizează doar noţiunea de vecinătate. Considerarea spaţiilor metrice concrete (care sunt spaţii topologice particulare) prezintă unele avantaje cum ar fi unicitatea limitei, caracterizarea ei cu şiruri, care nu se regăsesc în cazul general.

Teorema 3.1.3.1. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, $a \in A'$. Dacă funcţia f are limită în punctul a, atunci aceasta este unică.

Teorema 3.1.3.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $l \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in A$ cu $0 < d(x, a) < \delta$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$;

c) oricare ar fi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din mulţimea $A \setminus \{a\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Observaţia 3.1.3.2. a) Dacă $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $l \in \mathbb{R}$ dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \setminus \{a\}) \cap A$ avem $|f(x) - l| \leq g(x)$ şi dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ atunci, evident $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

b) Dacă $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p)$, $a = (a^1, a^2, \ldots, a^p)$ atunci

$$d(x, a) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (x^k - a^k)^2}$$

ţinând cont de dubla inegalitate evidentă:

$$|x^i - a^i| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{p}(x^k - a^k)^2} \le \sum_{k=1}^{p}|x^k - a^k|, \ i = 1, 2, \ldots, p$$

rezultă imediat că $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ încât pentru orice $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in A$ cu $0 < |x^i - a^i| < \delta, i=1, 2, \ldots, p$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

c) Dacă există două şiruri $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de elemente din $A\setminus\{a\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \ne \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ atunci, evident, funcţia f nu are limită în punctul a.

Pentru o funcţie reală de p variabile reale putem defini o noţiune particulară de limită, şi anume, limita după o direcţie.

Definiţia 3.1.3.3. Dacă $f : A\subseteq \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $a\in A'$, atunci pentru orice vector $v \ne 0$ din $\mathbb{R}^p$, se numeşte *limita funcţiei f în punctul a după direcţia lui v* (atunci când există) numărul $\lim\limits_{t\to 0} f(a + tv)$

Observaţia 3.1.3.3. a) Evident, punctele $x = a + tv$ au proprietatea că vectorul $x - a$ este coliniar cu v ceea ce justifică terminologia.

b) Dacă există $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ atunci există şi limita funcţiei f în punctul a, după direcţia lui v şi este egală cu l.

Reciproca acestei afirmaţii este falsă. Funcţia $f(x, y) = \dfrac{y^2 - 2x}{y^2 + 2x}$, $y^2 + 2x \ne 0$ are limita -1 în $(0, 0)$ pe orice direcţie dar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ nu există, aşa cum se constată considerând şiruri $\left(\left(\dfrac{\lambda}{n^2}, \dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in N^*}$ cu λ parametru real.

3.1.4. Funcţii reale de mai multe variabile continue într-un punct.

Definiţia 3.1.4.1. Fie $f : A\subseteq \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $a\in A \cap A'$. Funcţia f se numeşte *continuă în punctul a* dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Dacă funcţia f nu este continuă în punctul a, spunem că f este discontinuă în acest punct.

Folosind definiţia 3.1.3.2. a limitei unei funcţii într-un punct, precum şi teorema 3.1.3.2. pentru $l = f(a)$ rezultă imediat:

Teorema 3.1.4.1. Fie $f : A\subseteq \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $a\in A \cap A'$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este continuă în punctul a;
b) pentru orice vecinătate $V\in \mathcal{V}(f(a))$ există o vecinătate $U\in \mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x\in U \cap A$ avem $f(x) \in V$;
c) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x\in A$ cu $d(x, a) < \delta$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
d) pentru orice şir $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de elemente din mulţimea A cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

Ţinând seama de observaţia 3.1.3.2. obţinem:

Observaţia 3.1.4.1. a) Dacă $f, g:A\subseteq \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $a\in A \cap A'$ dacă există $U\in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x\in U\cap A$ avem $|f(x) - f(a)| \le g(x)$ şi dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x)= 0$ atunci, evident, f este continuă în punctul a.

b) Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $a = (a^1, a^2, \ldots, a^p) \in A \cap A'$, f este continuă în punctul a dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ încât pentru orice $x = (x^1, x^2, \ldots, x^p) \in A$ cu $|x^i - a^i| < \delta$, $i = 1,2, \ldots, p$ avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

c) Dacă există un şir $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de elemente din A cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \ne f(a)$ atunci, evident, funcţia f nu este continuă în punctul a.

Folosind noţiunea de limită după o direcţie introdusă în definiţia 3.1.3.3. obţinem:

Definiţia 3.1.4.2. Funcţia $f:A\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ este *continuă în punctul* $a\in A\cap A'$ *după direcţia vectorului* $v\neq 0$ dacă $\lim\limits_{t\to 0} f(a+tv)=f(a)$.

În particular, dacă vectorul v are toate componentele nule, cu excepţia componentei a i-a şi funcţia f este continuă după direcţia lui v în punctul a, spunem că f este *continuă parţial în raport cu variabila* x^i în punctul a. Evident, i poate lua oricare dintre valorile $1, 2, \ldots, p$. Având în vedere observaţia 3.1.3.3. b) rezultă că dacă f este continuă în punctul a atunci ea este continuă după orice direcţie în acest punct; în particular, ea este continuă parţial în raport cu fiecare variabilă $x^1, x^2, \ldots, x^p$ separat în punctul a, reciproca nefiind, în general, adevărată.

3.1.5. Funcţii vectoriale de variabilă vectorială continue într-un punct.

Fie $A\subseteq\mathbb{R}^p$ şi $f: A\to\mathbb{R}^m$, $p\geq 2$, $m\geq 2$. O asemenea funcţie se numeşte *funcţie vectorială de variabilă vectorială* sau funcţie vectorială de p variabile reale, deoarece pentru orice $x\in A$, $x=(x^1, x^2, \ldots, x^p)$ cu $x^i\in\mathbb{R}$,
$i=1, 2, \ldots, p$, $f(x)=f(x^1, x^2, \ldots, x^p)=y=(y^1, y^2, \ldots, y^m)\in\mathbb{R}^m$.

Funcţiile $f_k: A\to\mathbb{R}$, $f_k(x)=y^k$, $k=1, 2, \ldots, m$ sunt, evident, funcţii reale de p variabile reale şi se numesc *componentele funcţiei f*.

Considerând pe $\mathbb{R}^p$ şi $\mathbb{R}^m$ metrica euclidiană, dacă $a\in A'$ şi
$l=(l^1, l^2, \ldots, l^m)\in\mathbb{R}^m$, prin analogie cu definiţia 3.1.3.2. putem enunţa:

Definiţia 3.1.5.1. Elementul l se numeşte *limita funcţiei f în punctul a* dacă pentru orice $V\in\mathcal{V}(l)$ există $U\in\mathcal{V}(a)$ astfel încât oricare ar fi $x\in(U|\{a\})\cap A$ avem $f(x)\in V$.

Se poate demonstra:

Teorema 3.1.5.1. Elementul l este limita funcţiei f în punctul a dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul de elemente din $A|\{a\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.

Ţinând seama de teorema 3.1.2.1. referitoare la limita unui şir convergent din $\mathbb{R}^m$, deducem imediat:

Teorema 3.1.5.2. Funcţia vectorială $f: A\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ are limită în punctul $a\in A'$ dacă şi numai dacă toate componentele sale au limită în acest punct. Trecerea la limită se face pe componente, adică

$$\lim_{x\to a} f(x)=\left(\lim_{x\to a} f_1(x), \lim_{x\to a} f_2(x), \ldots, \lim_{x\to a} f_m(x)\right).$$

Studiul funcţiei f se reduce la studiul celor m componente ale sale care sunt funcţii reale de p variabile reale.

Prin analogie cu definiţia 3.1.4.1. putem enunţa:

Definiţia 3.1.5.2. Fie $f: A\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ $p\geq 2$, $m\geq 2$, $a\in A\cap A'$. Funcţia f se numeşte *continuă în punctul a* dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Ţinând seama de teorema 3.1.6.2. rezultă imediat:

Teorema 3.1.5.3. Funcţia vectorială $f: A\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ este continuă în punctul $a\in A\cap A'$ dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt continue în acest punct.

3 FUNCTII CONTINUE

3.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 3.2.1. Studiaţi convergenţa următoarelor şiruri din $\mathbb{R}^3$.

a) $x_n = \left(\frac{n}{2n+1}, \frac{n^2}{n^2+1}, \frac{1}{n}\right)$

b) $x_n = \left(1-\frac{1}{n}, 3^{-n}, \cos\frac{1}{n}\right)$

c) $x_n = \left(\frac{1}{2+n}, (-1)^{n+1}, \frac{n+1}{n}\right)$

Soluţii.

a) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ deducem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi limita sa este $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

b) Analog se obţine

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}, 3^{-n}, \cos\frac{1}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right), \lim_{n\to\infty}(3^{-n}), \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=(1, 0, 1)$$

c) Deoarece a doua componentă a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir divergent rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

Exerciţiul 3.2.2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

Soluţii.

a) Deoarece $\frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{t\to0}\frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$,

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2} = 0$ rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1\cdot 0 = 0$.

b) $\frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{x^2+y^2} = 2\cdot\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}$,

$(x, y) \neq (0, 0)$.

Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0$ şi $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ deducem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$.

Exercițiul 3.2.3. Să se demonstreze că următoarele funcții nu au limită în (*0, 0*).

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $x + y \neq 0$

b) $f(x, y) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot y}{e^{-\frac{2}{x^2}} + y^2}$, $x \neq 0$

Soluție.

a) Considerăm șirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de puncte din $\mathbb{R}^2$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{\lambda}{n}$ unde $\lambda \neq -1$ este un parametru real.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$, $f(x_n, y_n) = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ depinde de parametrul λ. Prin urmare, funcția f nu are limită în $(0, 0)$.

b) Considerăm șirul $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de puncte din $\mathbb{R}^2$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $y_n = \lambda \cdot e^{-\frac{1}{x_n^2}}$, $n \in \mathbb{N}$ unde λ este un parametru real.

Atunci, evident $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem

$$f(x_n, y_n) = \frac{\lambda \cdot e^{-\frac{2}{x_n^2}}}{e^{-\frac{2}{x_n^2}} + \lambda^2 e^{-\frac{2}{x_n^2}}} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$ depinde de parametrul λ. Rezultă că funcția f nu are limită în $(0, 0)$.

Exercițiul 3.2.4. Să se demonstreze că următoarele funcții sunt continue în (*0, 0*).

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0, x \in \mathbb{R} \\ 0, & y = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Soluție.

a) Prin înlocuire directă obținem: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ deci f este continuă în $(0, 0)$.

b) Pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ avem:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = (x^2 + y^2) \cdot \left|\sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq x^2 + y^2$$

şi, evident, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) = 0$. Ţinând seama de observaţia 3.1.4.1. a) rezultă că funcţia f este continuă în $(0, 0)$.

c) Pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cu $y \neq 0$, avem:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = y^2 ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) \leq y^2\cdot\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) = x^2 + y^2$$

de unde, ca mai sus, deducem că f este continuă în $(0, 0)$.

Exercițiul 3.2.5. Să se demonstreze că următoarele funcții nu sunt continue în (*0, 0*):

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}, x+y \neq 0 \\ 0, \quad x+y=0 \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ 1, \quad (x, y)=(0,0) \end{cases}$.

Soluție.

a) Funcția *f* nu are limită în (*0, 0*) deci nu este continuă în (*0, 0*).

b) Considerăm șirul $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent către *(0, 0)*. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, avem $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ = $\frac{1}{n^5} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2n^3}$.

Deci $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ = *0 ≠ f(0, 0)*. Ținând seama de observația 3.1.4.1. c) deducem că *f* nu este continuă în (*0, 0*). (Se poate arăta că această funcție are limită în (*0, 0*) dar aceasta nu este 1).

Exercițiul 3.2.6. Să se studieze continuitatea funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0,0) \\ a, \quad (x, y)=(0,0) \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}, (x, y, z) \neq (0,0,0) \\ a, \quad (x, y, z)=(0,0,0) \end{cases}$

Soluții.

a) Deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$ rezultă că *f* este continuă în (*0, 0*) dacă și numai dacă *a = 0*. Cum *f* este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, fiind compunere de funcții continue rezultă că dacă *a = 0* funcția *f* este continuă pe $\mathbb{R}^2$ iar dacă *a ≠ 0*, ea este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) Pentru orice (*x, y, z*) ≠ (*0, 0, 0*) avem:

$$\frac{1-\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-x^2-y^2-z^2}{(1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2})(x^2+y^2+z^2)} =$$

$$= -\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$

deci $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = -\dfrac{1}{2}$

Cum pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ funcţia este evident continuă, deducem că pentru $a = -\frac{1}{2}$ funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^3$ iar pentru $a \neq -\frac{1}{2}$ ea este continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Exerciţiul 3.2.7. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + |y^3|}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$. Să se demonstreze că funcţia f este continuă după orice direcţie în origine, dar f nu este continuă în origine.

Soluţie.

Fie (d) o dreaptă ce trece prin origine, de ecuaţie $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Restricţia funcţiei f la dreapta (d) este funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x, mx) = \begin{cases} \dfrac{m|x|}{|x|^3 + |m|^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Cum $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$ rezultă că g este continuă.

Dacă $m = 0$ dreapta (d) reprezintă axa Ox. În acest caz $g(x) = f(x, 0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci g este evident continuă în acest caz. În sfârşit, dacă (d) este axa Oy restricţia va fi $h(y) = f(0, y) = 0$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, deci este continuă. Prin urmare, restricţia lui f la orice dreaptă ce trece prin origine este continuă în origine.

Considerăm acum şirul de puncte din $\mathbb{R}^2$, $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ care converge la $(0, 0)$ şi observăm că $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{2} = \infty$, deci f nu este continuă în $(0, 0)$.

Exerciţiul 3.2.8. Să se arate că funcţia $f(x) = xa^x - 1$, $a > 1$ se anulează într-un punct $\xi \in (0, 1)$.

Soluţie.

Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ ca funcţie elementară, deci are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Cum $f(1) = a - 1 > 0$ şi $f(0) = -1 < 0$, rezultă că există $\xi \in (0, 1)$ astfel încât $f(\xi) = 0$.

Exerciţiul 3.2.9. Stabiliţi dacă următoarele funcţii au limită în $x = 0$.

a) $f : (-1, 1) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \dfrac{e^{3x} - 1}{2x}, \dfrac{1 - \cos x}{x\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}\right)$

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}, \dfrac{\sin x}{x}, \sin \dfrac{1}{x}\right)$

Soluţii. a) Fie $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. În $x = 0$ suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$.

Deoarece $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ pentru orice $x \in (-1, 1)\setminus\{0\}$ deducem că $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 1$. Notând $f_2(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{2x}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, şi încercând să calculăm $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ constatăm că suntem din nou în cazul $\dfrac{0}{0}$.

Vom utiliza următoarea egalitate importantă: $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t} = 1$.

Deoarece $f_2(x) = \dfrac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \dfrac{3}{2}$ pentru orice $x \neq 0$ deducem imediat că $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \dfrac{3}{2}$.

Fie acum $f_3(x) = \dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$, $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$. În $x = 0$ suntem, din nou, în cazul $\dfrac{0}{0}$. Deoarece pentru orice $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$ avem

$$f_3(x) = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x(\sqrt{1+x}-1)} = \frac{2\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x^2} = = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \left(\sqrt{1+x}+1\right)$$

deducem că $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Deoarece $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ pentru orice $x \in (-1, \infty)\setminus\{0\}$ şi toate componentele f_1, f_2, f_3 au llimită în $x = 0$, deducem că f are limită în

$x = 0$ şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (\lim\limits_{x\to 0} f_1(x), \lim\limits_{x\to 0} f_2(x), \lim\limits_{x\to 0} f_3(x)) = \left(1, \dfrac{3}{2}, 1\right)$.

b) Analog, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ unde $f_1(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$,

$f_3(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Evident $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 1$. Componenta f_3 nu are limită în $x = 0$ (este suficient să considerăm $a_n = \dfrac{1}{n\pi}$ şi $b_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi să observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} f_3(a_n) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$).

Deoarece una dintre componente nu are limită în $x = 0$, deducem că funcţia f nu are limită în $x = 0$.

Exerciţiul 3.2.10. Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$f(x, y) = \left(\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ nu are limită în $(0, 0)$.

Soluţie. Fie $f_1(x, y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ şi $f_2(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pentru $(x, y) \neq (0, 0)$ componentele funcţiei vectoriale f. Deoarece pentru orice

$(x, y) \neq (0, 0)$ avem $|f_1(x, y)| \leq \dfrac{x^2 |y^3|}{x^2} = |y^3|$ dacă $x \neq 0$ şi $f_1(0, y) = \dfrac{0}{y^2}$ dacă $y \neq 0$ iar $\lim\limits_{y\to 0} |y^3| = 0$ rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x, y) = 0$.

Deoarece $f_2(x, kx) = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ pentru orice $x \neq 0$ rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} f(x, kx) = = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ care depinde de k şi funcţia f_2 nu are limită în $(0, 0)$. Deducem de aici că funcţia vectorială f nu are limită în $(0, 0)$.

Exerciţiul 3.2.11. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin 5x}{x}, \dfrac{1-\cos x}{x^2}, \dfrac{e^x - 1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \left(5, \dfrac{1}{2}, 1\right), & x = 0 \end{cases}$$

Soluţie. Fiecare componentă a funcţiei f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, deci f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = 5$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \left(5, \dfrac{1}{2}, 1\right) = f(0)$, deci f este continuă şi în $x = 0$. Prin urmare f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 3.2.12. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}, (1+|xy|)^{\frac{1}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}}, \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) & ,(x, y) \neq (0,0) \\ (a, b, c) & ,(x, y) = (0,0) \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie. Funcţia vectorială f este continuă pe $\mathbb{R}^2$ dacă şi numai dacă fiecare componentă a sa este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ cele trei componente sunt continue fiind compuneri de funcţii continue. Pentru a studia continuitatea funcţiei vectoriale f în $(0, 0)$ determinăm limita în $(0,0)$ a fiecărei componente.

Deoarece $f_1(x, y) = \dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \dfrac{-x^2-y^2}{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1+x^2+y^2})}$ pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$ rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x, y) = -\dfrac{1}{2}$.

$$f_2(x, y) = (1+|xy|)^{\frac{1}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}} = \left[(1+|xy|)^{\frac{1}{|xy|}}\right]^{\frac{|xy|}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}}.$$

Dar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+|xy|)^{\frac{1}{|xy|}} = e$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|xy|}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} = 0.$

Prin urmare $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x, y) = e^0 = 1.$

Avem şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\frac{x^2+y^2}{2} \cdot$$

$$\cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \left(-\dfrac{1}{2}, 1, 0\right)$. Cum $f(0, 0) = (a, b, c)$ rezultă că f este continuă în $(0,0)$ dacă şi numai dacă $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$.

4. FUNCŢII DIFERENŢIABILE. EXTREME LOCALE.

4.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

4.1.1. Diferenţiabilitatea funcţiilor reale de o variabilă reală.

Multe probleme concrete conduc la evaluarea aproximativă a creşterii unei anumite mărimi în raport cu creşterea alteia. Pentru simplitatea ei este preferată aproximarea liniară.

Fiind dată o funcţie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ şi un punct fixat $x_0 \in (a, b)$ se caută o funcţie liniară L_{x_0} astfel încât creşterea funcţiei f în punctul x_0, relativă la creşterea h a argumentului, să poată fi aproximată cu $L_{x_0}(h)$, adică:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx L_{x_0}(h)$$

pentru h suficient de mic. Pentru ca o asemenea formulă aproximativă să poată fi acceptată este necesar ca:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

ceea ce asigură că eroarea în formula de aproximare poate fi făcută oricât de mică pentru variaţii din ce în ce mai mici ale argumentului.

Apar în mod natural o serie de probleme, cum ar fi: existenţa şi unicitatea aplicaţiei liniare L_{x_0}, precum şi caracterizarea funcţiilor f pentru care pot fi considerate asemenea aproximări liniare.

Din liceu se ştie că pentru o funcţie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilă în punctul $x_0 \in (a, b)$, poate fi considerată formula de aproximare:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot h$$

pentru h suficient de mic.

Aceste consideraţii conduc, în mod natural, la următoarea definiţie:

Definiţia 4.1.1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă în punctul* x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

Observaţia 4.1.1.1. a) Orice funcţie liniară L: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de forma $L(x) = c \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, unde $c = L(1)$; reciproc, oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$, fixat, egalitatea $L(x) = c \cdot x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, defineşte o funcţie liniară L: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prin urmare, orice aplicaţie liniară de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$ este bine determinată de o constantă reală. Deducem astfel că funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă există $c_{x_0} \in \mathbb{R}$, încât:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - c_{x_0} \cdot h}{h} = 0$$

b) Egalitatea $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$ poate fi scrisă echivalent:

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{|h|} = 0$$

Ultima egalitate prezintă avantajul că poate fi uşor transcrisă pentru funcţii de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^m$ înlocuind modulul din $\mathbb{R}$ cu norma din $\mathbb{R}^p$, respectiv din $\mathbb{R}^m$.

Teorema următoare stabileşte faptul că o funcţie reală de o variabilă reală este diferenţiabilă într-un punct fixat x_0 dacă şi numai dacă ea este derivabilă în acest punct.

Teorema 4.1.1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Dacă f este diferenţiabilă în x_0, atunci f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = L_{x_0}(1)$. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este diferenţiabilă în x_0 şi $L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$.

Observaţia 4.1.1.2. Din această teoremă se deduce imediat că aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţia 4.1.1.1. este unic determinată de f şi x_0.

Definiţia 4.1.1.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul fixat $x_0 \in A$, aplicaţia liniară L_{x_0} se numeşte *diferenţiala funcţiei f în punctul x_0* şi se notează df_{x_0}. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă pe mulţimea A* dacă este diferenţiabilă în fiecare punct $x \in A$. În acest caz, notând prin $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mulţimea tuturor aplicaţiilor liniare de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$, funcţia $df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definită prin $(df)(x) = df_x$ se numeşte *diferenţiala funcţiei f pe mulţimea A*.

Observaţia 4.1.1.3. a) Cunoaşterea funcţiei $df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ revine la cunoaşterea funcţiei $df_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pentru orice $x \in A$. Din teorema 4.1.1.1. deducem că pentru orice $x \in A$ şi orice $h \in \mathbb{R}$ avem:

$$(df)(x)(h) = df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

b) Funcţia identitate pe A, $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$ este diferenţiabilă pe A şi diferenţiala sa, *notată cu dx*, este egală, în fiecare punct $x \in A$, cu funcţia identitate pe $\mathbb{R}$. Prin urmare, $dx : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ şi $(dx)(x) = 1_{\mathbb{R}}$ pentru orice $x \in A$, adică, oricare ar fi $x \in A$ şi oricare ar fi $h \in \mathbb{R}$, $(dx)(x)(h) = h$.

c) Cu ajutorul diferenţialei funcţiei identitate pe A putem exprima diferenţiala funcţiei f diferenţiabile pe A, astfel:

$$df = f' \cdot dx$$

Este evident că studiul funcţiilor reale de o variabilă reală, diferenţiabile se reduce la studiul funcţiilor derivabile, cunoscut din liceu.

4.1.2. Diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale de o variabilă reală.

Ţinând seama de observaţia 4.1.1.1. b), definiţia 4.1.1.1. se poate exprima astfel:

Definiţia 4.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie vectorială de o variabilă reală arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă în punctul x_0* dacă există o aplicaţie liniară

$L_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ astfel incât:

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{\| f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h) \|}{|h|} = 0$$

(la numărător se consideră norma euclidiană din $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$)

Ţinând seama de faptul că, în $\mathbb{R}^m$, operaţiile algebrice şi trecerea la limită se fac pe componente, rezultă imediat:

Teorema 4.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}^m$ o funcţie vectorială de o variabilă reală, de componente $f_k : A \to \mathbb{R}$ $k = 1, 2, \ldots, m$, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt diferenţiabile în x_0. Ţinând seama de teorema 4.1.1.1. şi de faptul că $L_{x_0}(h) = (c_1 h, c_2 h, \ldots, c_m h)$, unde $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ se obţine $L_{x_0}(h) = (f'_1(x_0) \cdot h, f'_2(x_0) \cdot h, \ldots, f'_m(x_0) \cdot h) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \ldots, f'_m(x_0)) \cdot h$.

Prin urmare, şi în acest caz, aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţie este bine determinată de funcţia f şi punctul x_0, mai exact de vectorul $(f'_1(x_0), f'_2(x_0), \ldots, f'_m(x_0))$ unic determinat de f şi x_0.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} şi o vom numi *diferenţiala funcţiei f în punctul x_0*; vom nota:

$$(f'_1(x_0), f'_2(x_0), \ldots, f'_m(x_0)) = f'(x_0)$$

şi vom numi acest vector *derivata funcţiei vectoriale f în punctul x_0*. Atunci, evident $df_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$ pentru orice $h \in \mathbb{R}$.

Să reţinem deci că derivarea şi diferenţierea unei funcţii vectoriale de o variabilă reală se realizează ca şi trecerea la limită sau studiul continuităţii, pe componente.

4.1.3. Derivate parţiale. Diferenţiabilitatea funcţiilor reale de variabilă vectorială. Extreme locale.

Considerăm $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu norma euclidiană, $p \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o submulţime deschisă.

Ţinând seama de observaţia 4.1.1.1. b), definiţia 4.1.1.1. se extinde astfel:

Definiţia 4.1.3.1. Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ se numeşte *diferenţiabilă în punctul* $x_0 \in A$ dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)|}{\|h\|} = 0$$

(la numitor se consideră norma euclidiană din $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$)

Observaţia 4.1.3.1. Deoarece aplicaţia L_{x_0} este liniară, pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$, $h = (h_1, h_2, ..., h_p)$ avem: $L_{x_0}(h) = c_1^0 h_1 + c_2^0 h_2 + ... + c_p^0 h_p$, unde $c_i^0 \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., p$.

În ideea de a stabili legătura între numerele c_1^0, c_2^0, ..., c_p^0 şi funcţia f, se poate arăta că, dacă f este diferenţiabilă în x_0, deci aplicaţia L_{x_0} există,

$$c_i^0 = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0 + h_i, x_{i+1}^0, ..., x_p^0) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_p^0)}{h_i}$$

$$i = 1, 2, ..., p$$

Prin urmare, şi în acest caz, aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţie este unic determinată de funcţia f şi punctul x_0.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} şi o vom numi *diferenţiala funcţiei f în punctul* x_0.

Limita de mai sus se numeşte *derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila* x_i *în punctul* x_0 şi se notează $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Deci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0 + h_i, x_{i+1}^0, ..., x_p^0) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_p^0)}{h_i}$

$$i = 1, 2, ..., p$$

Rezultă astfel:

Teorema 4.1.3.1. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 atunci f are derivate parţiale în acest punct în raport cu toate variabilele şi:

$$df_{x_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot h_2 + ... ++ \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \cdot h_p$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, ..., h_p) \in \mathbb{R}^p$.

Observaţia 4.1.3.2. a) Rolul derivatei de la funcţii de o variabilă îl joacă vectorul $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\right)$ care se numeşte *gradientul funcţiei f în punctul* x_0 şi se notează *(grad f)(*x_0*)*.

Evident, $df_{x_0}(h) = (\mathrm{grad}\, f)(x_0) \cdot h$, pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$.

b) Dacă f are derivate parţiale în x_0, în raport cu toate variabilele nu rezultă, în general, că f este diferenţiabilă în x_0. De exemplu, dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \text{ si } y \neq 0 \\ 0, x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$ atunci există $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, dar f nu este diferenţiabilă în $(0, 0)$. Dacă f ar fi diferenţiabilă în $(0, 0)$ ţinând seama de teorema precedentă, $L_{(0, 0)}(h) = 0$ pentru orice $h \in \mathbb{R}^p$.

Raportul $\dfrac{|f(h_1,h_2)-f(0,0)-L_{(0,0)}(h_1,h_2)|}{\|h\|} = \dfrac{1}{\|h\|}$ nu are însă limita zero când $\|h\| \to 0$, deci f nu este diferenţiabilă în $(0, 0)$.

c) Fie $i \in \{1,2,...,p\}$ arbitrar, fixat. Fie $\Pi_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\Pi_i(x_1, x_2, ..., x_p) = x_i$ aplicaţia de proiecţie. Oricare ar fi $x_0 \in \mathbb{R}^p$, Π_i este diferenţiabilă în x_0 şi

$(d\,\Pi_i)_{x0} = \Pi_i$. De obicei se notează $d\,\Pi_i$ cu dx_i. Astfel, $(dx_i)_{x0}(h_1, h_2, ..., h_p) = = \Pi_i(h_1, h_2, ..., h_p) = h_i$. Cu ajutorul diferenţialelor aplicaţiilor de proiecţe, diferenţiala unei funcţii diferenţiabile arbitrare se exprimă astfel:

$$df_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cdot\left(dx_1\right)_{x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\cdot\left(dx_2\right)_{x_0} + \ldots + + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\cdot\left(dx_p\right)_{x_0}$$

aceasta fiind o egalitate de aplicaţii din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Dacă f este diferenţiabilă în orice punct din A, atunci, evident, obţinem:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}\cdot dx_p$$

aceasta fiind o egalitate de aplicaţii definite pe A cu valori în $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, unde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ este funcţia care asociază fiecărui punct din A numărul real care este derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila x_i în acest punct.

Definiţia 4.1.3.2. Funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ se numeşte *derivabilă parţial pe mulţimea A* dacă are derivate parţiale în raport cu toate variabilele sale în orice punct din A. În acest caz se pot defini p funcţii $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$: $A \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, 2, ..., p$ numite *derivatele parţiale* ale lui f pe mulţimea A. Funcţia f este de clasă C^1 pe A şi se notează $f \in C^1(A)$ dacă f este derivabilă parţial pe A şi funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., p$ sunt continue pe A.

Teorema 4.1.3.2. Dacă funcţia $f : A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este derivabilă parţial pe o vecinătate deschisă V a punctului $x_0 \in A$, iar funcţiile $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$: $V \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., p$ sunt continue în x_0, atunci funcţia f este diferenţiabilă în x_0.

Dacă $f \in C^1(A)$ atunci f este diferenţiabilă pe A.

Observaţia 4.1.3.3. Continuitatea derivatelor parţiale în x_0 este o condiţie suficientă pentru diferenţiabilitatea funcţiei f în acest punct, dar nu neapărat necesară. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x, y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferenţiabilă în origine fără ca derivatele sale parţiale să fie continue în acest punct (vezi exerciţiul 4.3.4.).

Definiţia 4.1.3.3. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o submulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_p^0) \in A$ şi fie $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ un versor dat ($\|v\| = 1$). Funcţia f se numeşte *derivabilă în punctul x_0 după versorul v* dacă există în $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}$. Notăm această limită cu $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ şi o numim *derivata funcţiei f după versorul* v *în punctul x_0*.

Observaţia 4.1.3.4. a) Notând $x = x_0 + tv$ rezultă că vectorul $x - x_0$ este coliniar cu v, iar t este abscisa punctului x pe dreapta determinată de x_0 şi v, orientată cu ajutorul lui v. Cu această notaţie, putem scrie:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x - x_0 = tv}} \frac{f(x) - f(x_0)}{t}$$

ceea ce justifică terminologia utilizată.

b) Notând cu $v^* = -v$ (versorul opus) se observă imediat că dacă există $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ atunci există $\frac{\partial f}{\partial v^*}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$; acest fapt justifică de ce derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ este asociată versorului şi nu direcţiei (care admite doi versori)

c) Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{R}^p$, atunci derivata funcţiei f după versorul e_k este tocmai derivata parţială în raport cu variabila x_k, adică

$$\frac{\partial f}{\partial e_k}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0),\ k = 1, 2, \ldots, p$$

Prin urmare, derivatele parţiale ale unei funcţii într-un punct sunt cazuri particulare de derivate după versori în acel punct.

Teorema 4.1.3.3. Dacă funcţia f este diferenţiabilă în x_0, atunci există $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ pentru orice versor $v \in \mathbb{R}^p$ şi $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df_{x_0}(v)$.

Ţinând seama de teorema 4.1.3.1. deducem că:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = (grad\, f)(x_0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot v_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \cdot v_p$$

Deci, dacă f este diferenţiabilă în x_0, atunci ea are derivată după orice versor în x_0 şi aceasta se poate exprima cu ajutorul derivatelor parţiale în acest punct.

Definiţia 4.1.3.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o submulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă parţial în raport cu variabila x_k pe o vecinătate V a punctului fixat $x_0 \in A$. Dacă funcţia $\frac{\partial f}{\partial x_k} : V \to \mathbb{R}$ este derivabilă parţial în raport cu variabila x_j, $j \neq k$ în punctul x_0, atunci f se numeşte *de două ori derivabilă parţial* în punctul x_0, în raport cu variabilele x_j şi x_k, iar $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x_0)$ se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)$ şi se numeşte *derivata parţială mixtă de ordinul doi a funcţiei f în punctul x_0 în raport cu variabilele x_j şi x_k*. Dacă $j = k$, în condiţiile de mai sus, funcţia se numeşte de două ori derivabilă parţial în punctul x_0, în raport cu variabila x_k, iar $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x_0)$ se notează $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x_0)$ şi se numeşte *derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f în punctul x_0 în raport cu variabila x_k*.

Dacă funcţia f este de două ori derivabilă parţial în raport cu variabilele x_j şi x_k în fiecare punct din A, spunem că f este de două ori derivabilă parţial în raport cu variabilele x_j şi x_k pe A, iar aplicaţia $x \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$ se numeşte *derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f în raport cu variabilele x_j şi x_k*.

Evident, j şi k pot lua oricare din valorile $1, 2, .., p$ deci, pentru o funcţie de p variabile, se pot defini p^2 derivate parţiale de ordinul doi, dintre care $p^2 - p$ sunt mixte.

Funcţia f se numeşte *de clasă C^2* pe mulţimea A, dacă toate derivatele parţiale de ordinul doi există şi sunt continue pe A.

Observaţia 4.1.3.5. Pentru funcţii de două variabile există patru derivate parţiale de ordinul doi: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Pentru unele funcţii derivatele mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sunt egale. În schimb, pentru funcţia

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$, avem:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$. (vezi exerciţiul 4.3.10.)

Deci, în acest caz, derivatele parţiale mixte în (0, 0) nu sunt egale. Teorema următoare dă condiţii suficiente pentru egalitatea derivatelor parţiale mixte.

Teorema 4.1.3.4. (H.A. Schwarz) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă,

$f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe A. Atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$,

$j, k = 1, 2, \ldots, p$.

Observaţia 4.1.3.6. Continuitatea derivatelor mixte este o condiţie suficientă, dar nu neapărat necesară, pentru egalitatea acestora. De exemplu, pentru funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$ avem

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, dar funcţia $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu este continuă în origine. (vezi exerciţiul 4.3.11.)

Definiţia 4.1.3.5. Matricea $H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0)\right)$, $j, k = 1, 2, \ldots, p$ se numeşte *hessiana funcţiei f în punctul* x_0.

În cazul în care f este de clasă C^2 matricea $H_f(x_0)$ este o matrice simetrică. În acest caz, forma pătratică determinată de această matrice, adică aplicaţia $\varphi_{x_0} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\varphi_{x_0}(h) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$ joacă un rol foarte important în determinarea punctelor de extrem local pentru o funcţie reală de mai multe variabile reale.

Definiţie 4.1.3.6. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară. Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *punct de extrem local al funcţiei f* dacă există o vecinătate V a punctului x_0 în care diferenţa $f(x) - f(x_0)$ are semn constant. Mai precis, punctul x_0 se numeşte *punct de maxim* (respectiv de *minim*) *local* al lui f dacă pentru orice $x \in V$ avem $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (respectiv $f(x) - f(x_0) \geq 0$). Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *punct critic* (sau *staţionar*) pentru funcţia f, dacă f are derivate parţiale de ordinul întâi nule în x_0, adică $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Teorema următoare stabileşte condiţii necesare de extrem.

Teorema 4.1.3.5. (Fermat) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă. Dacă funcţia

$f : A \to \mathbb{R}$ are derivate parţiale de ordinul întâi în punctul $x_0 \in A$ şi x_0 este punct de extrem local al lui f, atunci x_0 este punct critic (staţionar) pentru f.

Observaţia 4.1.3.7. Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă parţial în raport cu toate variabilele pe mulţimea deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ atunci punctele de extrem local ale funcţiei f se află printre soluţiile situate în A ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_p) = 0, \ i = 1, 2, ..., p$$

Nu orice soluţie a acestui sistem este un punct de extrem. De exemplu, pentru funcţia $f(x, y) = x^3 - y^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, singurul punct critic este (0, 0), dar $f(x, y) - f(0, 0)$ nu păstrează un semn constant în nici o vecinătate a originii. Prin urmare, (0, 0) este punct critic, dar nu este punct de extrem pentru f.

În cele ce urmează, în cazul în care f este de clasă C^2 vom da condiţii suficiente prin utilizarea cărora să se poată decide care din punctele critice ale unei funcţii sunt puncte de extrem.

Teorema 4.1.3.6. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă şi convexă, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe A. Fie $x_0 \in A$ un punct critic al funcţiei f şi φ_{x_0} forma pătratică determinată de matricea hessiană $H_f(x_0)$. Dacă forma pătratică φ_{x_0} este pozitiv definită (negativ definită) atunci x_0 este punct de minim (respectiv de maxim) local pentru f.

În demonstraţia acestei teoreme este foarte utilă formula lui Taylor cu restul de ordinul doi:

Dacă , $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2 pe mulţimea deschisă şi convexă A, iar $x_0 \in A$ este un punct fixat, atunci, pentru orice $x \in A$ există ξ pe segmentul $[x_0, x]$ astfel încât:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

Observaţia 4.1.3.8. a) Dacă f este de clasă C^2 pe A, matricea hessiană în orice punct este o matrice simetrică, deci toate valorile ei proprii sunt reale. Dacă $H_f(x_0)$ are toate valorile proprii strict pozitive (respectiv strict negative) atunci forma pătratică φ_{x_0} este pozitiv definită (respectiv negativ definită) şi deci x_0 este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f.

b) Condiţiile lui Sylvester din teoria formelor pătratice aplicate formei φ_{x_0} de mai sus arată că x_0 este punct de minim dacă minorii principali $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ ai matricii hessiene sunt strict pozitivi; x_0 este punct de maxim dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, …, $(-1)^p \cdot \Delta_p > 0$.

c) Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = 0$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$ atunci se studiază semnul creşterii $f(x) - f(x_0)$ direct sau cu ajutorul formulei lui Taylor scrisă corespunzător (dacă f este de clasă C^n, $n \geq 3$).

4.1.4. Diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială. Matricea jacobiană.

Ţinând seama de observaţia 4.1.1.1. b), definiţia 4.1.1.1. se poate extinde astfel:

Definiţia 4.1.4.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă, $p \geq 2$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ o funcţie vectorială de variabilă vectorială arbitrară, $x_0 \in A$ un punct fixat. Funcţia f se numeşte *diferenţiabilă în punctul* x_0 dacă există o aplicaţie liniară $L_{x_0} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ astfel încât:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| f(x_0 + h) - f(x_0) - L_{x_0}(h) \|}{\| h \|} = 0$$

(la numărător se consideră norma euclidiană din $\mathbb{R}^m$, iar la numitor, norma euclidiană din $\mathbb{R}^p$)

Ţinând seama de faptul că în $\mathbb{R}^m$ operaţiile algebrice şi trecerea la limită se face pe componente, rezultă ca şi în cazul 4.1.2. :

Teorema 4.1.4.1. Funcţia f este diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă toate componentele sale sunt diferenţiabile în x_0.

În acest caz L_{x_0} are drept componente diferenţialele df_{1x_0}, df_{2x_0}, …, df_{mx_0} ale componentelor lui f, care sunt aplicaţii liniare de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}$, exprimate cu ajutorul derivatelor parţiale ca în

teorema 4.1.3.1. Prin urmare, şi în acest caz, aplicaţia liniară L_{x_0} din definiţia 4.1.4.1. este bine determinată de funcţia *f* şi punctul x_0, mai precis de matricea:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix}$$

numită matrice Jacobi (sau matrice jacobiană) a funcţiei *f* în punctul x_0, notată $J_f(x_0)$.

Vom nota L_{x_0} cu df_{x_0} şi o vom numi *diferenţiala funcţiei f în punctul* x_0. Atunci evident, $df_{x_0}(h) = J_f(x_0)\cdot h$, pentru orice $h\in \mathbb{R}^p$.

Dacă $m = p$ matricea Jacobi este o matrice pătrată, iar determinantul ei poartă numele de *jacobian* sau *determinant funcţional* al aplicaţiei *f* în punctul x_0 şi se notează

$$\det J_f(x_0) = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}(x_0)$$

Referitor la funcţiile compuse se poate demonstra:

Teorema 4.1.4.2. Fie $A\subseteq \mathbb{R}^p$, $B\subseteq \mathbb{R}^m$ mulţimi deschise, $f: A\to B$ o funcţie diferenţiabilă în punctul $x_0\in A$, $g: B\to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă în punctul $f(x_0)\in B$. Atunci funcţia compusă $g\circ f: A\to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în punctul x_0 şi :

$$J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0))\cdot J_f(x_0)$$

Observaţia 4.1.4.1. a) Din această egalitate rezultă diverse reguli de derivare parţială a funcţiilor compuse. De exemplu, dacă $p = n = 2$, $m = 1$, funcţia *f* este de variabile *x* şi *y*, iar *g* este de variabile *u, v* , ambele diferenţiabile, obţinem:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x,y), f_2(x,y))\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x,y), f_2(x,y))\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(f_1(x,y), f_2(x,y))\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x,y), f_2(x,y))\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)$$

b) Dacă $p = n = m$ se obţine o relaţie importantă între determinanţii funcţionali şi anume:

$$\det[J_{g\circ f}(x_0)] = \det[J_g(f(x_0))]\cdot\det[J_f(x_0)]$$

4. FUNCŢII DIFERENŢIABILE. EXTREME LOCALE.

4.2. Exerciţii rezolvate.

Exerciţiul 4.2.1. Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, x < 0 \\ x^2, \quad x \geq 0 \end{cases}$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Funcţia f este evident, derivabilă în orice $x \neq 0$, $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ dacă $x < 0$ şi $f'(x) = 2x$ dacă $x > 0$. Deoarece f este continuă în $x = 0$ aplicând o consecinţă a teoremei lui Lagrange, rezultă că $f'_s(0) = \lim\limits_{x \uparrow 0} f'(x) = 0$ şi $f'_d(0) = \lim\limits_{x \downarrow 0} f'(x) = 0$, deci f este derivabilă în $x = 0$ şi $f'(0) = 0$.

Prin urmare f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$, iar diferenţiala sa este funcţia $df: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcţia liniară şi continuă

$$df_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ df_x(h) = f'(x) \cdot h = \begin{cases} h \cdot \sin 2x, x < 0 \\ 2x \cdot h \quad, x \geq 0 \end{cases}.$$

Exerciţiul 4.2.2. Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \text{ unde } f_1(x) = \sin x,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -x^2, \ x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, x > 0 \end{cases},\ f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad, x = 0 \end{cases}$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Demonstrăm că funcţiile f_1, f_2, f_3 sunt diferenţiabile pe $\mathbb{R}$.

Evident, f_1 este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci este şi diferenţiabilă, iar diferenţiala sa este $df_1: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $df_{1x}(h) = f'_1(x) \cdot h = h \cdot \cos x$.

Funcţia f_2 este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi

$$f'_2(x) = \begin{cases} -2x \qquad, x < 0 \\ x(2-x)e^{-x}, x > 0 \end{cases}$$

Deoarece $\lim\limits_{x \uparrow 0} f'_2(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} f'_2(x) = 0$ şi f este continuă în 0, deducem că f este derivabilă în 0 şi $f'_2(0) = 0$. Prin urmare, f_2 este derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci este şi diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi diferenţiala sa este funcţia $df_2: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcţia

$$df_{2x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ df_{2x}(h) = \begin{cases} -2xh \qquad, x \leq 0 \\ x(2-x)e^{-x}h, x > 0 \end{cases}$$

Componenta f_3 este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dar nu se poate aplica consecinţa teoremei lui Lagrange pentru studiul derivabilităţii în $x = 0$ deoarece derivata f'_3 nu are limită în $x = 0$ ($\cos \dfrac{1}{x}$ nu are limită în $x = 0$). Cu definiţia, obţinem $f'_3(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_3(x) - f_3(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$, deci f_3 este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$f'_3(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad, x = 0 \end{cases}.$$

Rezultă că f_3 este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi diferenţiala sa este funcţia $df_3: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcţia $df_{3x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $df_{3x}(h) = \begin{cases} (2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})h, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Prin urmare funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ dată este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}$ şi diferenţiala sa este funcţia $df: \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ care asociază fiecărui $x \in \mathbb{R}$ funcţia $df_x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$df_x(h) = (f'_1(x)h, f_2(x)h, f'_3(x)h)$.

Exerciţiul 4.2.3. Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy^2$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Evident, funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, date de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$ şi diferenţiala sa este funcţia
$df: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ funcţia liniară şi continuă $df_{(x, y)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df_{(x, y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2$ adică

$$df_{(x,y)}(h_1, h_2) = (3x^2 + y^2)\cdot h_1 + 2xy\cdot h_2$$

Exerciţiul 4.2.4. Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Funcţia f are derivate parţiale pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, fiind compunere de funcţii derivabile. Folosind regulile de derivare uzuale obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} +$$

$$+(x^2 + y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x^2 + y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$.

Analog $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pentru orice $(x, y) \neq (0, 0)$.

Cu definiţia, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h_1\to 0}\frac{f(h_1,0)-f(0,0)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0} h_1 \sin\frac{1}{|h_1|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h_2\to 0}\frac{f(0,h_2)-f(0,0)}{h_2} = \lim_{h_2\to 0} h_2 \sin\frac{1}{|h_2|} = 0$$

Prin urmare, f este derivabilă parţial pe $\mathbb{R}^2$, derivatele parţiale fiind $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$, fiind compuneri de funcţii elementare. Prin urmare funcţia f este diferenţiabilă pe mulţimea $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ şi diferenţiala sa este funcţia $df: \mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \neq (0, 0)$ funcţia liniară şi continuă

$df_{(x,y)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df_{(x,y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\cdot h_2$.

Pentru studiul diferenţiabilităţii funcţiei f în $(0, 0)$ teorema 4.1.3.2. nu mai este aplicabilă, deoarece $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu sunt continue în $(0, 0)$ (pentru $x_n = y_n = \frac{1}{2n\pi\sqrt{2}}$, $n\in\mathbb{N}^*$ avem evident $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0, 0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$).

De aceea, pentru studiul diferenţiabilităţii în $(0, 0)$ procedăm astfel: considerăm funcţia liniară şi continuă

$$L_{(0,0)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ L_{(0,0)}(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0$$

Pentru $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ avem

$$R(h) = \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - L_{(0,0)}(h_1,h_2)|}{\|h\|} =$$

$$= \frac{(h_1^2+h_2^2)\left|\sin\frac{1}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}}\right|}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}} = \sqrt{(h_1^2+h_2^2)}\left|\sin\frac{1}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}}\right|$$

Deoarece $\lim\limits_{\|h\|\to 0} R(h) = 0$, deducem că *f* este diferenţiabilă în $(0, 0)$ şi
$df_{(0,0)} = L_{(0,0)}$.

Prin urmare *f* este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi diferenţiala sa este funcţia $df: \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dată de $df_{(x,y)}(h_1, h_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2$.

Exerciţiul 4.2.5. Să se demonstreze că funcţia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xy, y\sin x, x + y)$ este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi să se determine diferenţiala sa.

Soluţie. Componentele funcţiei *f* sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$, deci diferenţiabile pe $\mathbb{R}^2$.

Dacă $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = y \sin x$, $f_3(x, y) = x + y$, funcţiile $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = x$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = y \cos x$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \sin x$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = 1$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = 1$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$. Matricea jacobiană a funcţiei *f* este

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y\cos x & \sin x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ pentru } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Diferenţiala funcţiei *f* este funcţia $df : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ care asociază fiecărui punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ funcţia liniară şi continuă
$df_{(x,y)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dată de

$$df_{(x,y)}(h_1, h_2) = J_f(x, y)\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yh_1 + xh_2 \\ (y\cos x)h_1 + (\sin x)h_2 \\ h_1 + h_2 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 4.2.6. Să se determine dz dacă $z(x, y) = f\left(\dfrac{x}{y}, xy\right)$, unde $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 pe *A*.

Soluţie. Notând cu *u, v* variabilele funcţiei *f* şi folosind regulile de derivare parţială a funcţiilor compuse, obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy) =$$

$$= \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \text{ pentru } y \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(xy) =$$

$$= -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right) \text{ pentru } y \neq 0$$

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial u}$ şi $\frac{\partial f}{\partial v}$ sunt continue, rezultă imediat că $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ sunt continue în orice punct (x, y) cu $y \neq 0$ şi $dz_{(x,y)}(h_1, h_2) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\cdot h_1 + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\cdot h_2 = \left[\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\right]\cdot h_1$ +

$+\left[-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{x}{y}, xy\right) + x\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x}{y}, xy\right)\right]\cdot h_2$ pentru orice $y \neq 0$, $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exerciţiul 4.2.7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Demonstraţi că $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0, 0)$.

Soluţie. Prin calcul direct rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases} \text{ şi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Atunci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1 \text{ şi}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1$ de unde rezultă că $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0, 0)$.

Exerciţiul 4.2.8. Să se determine punctele de extrem local pentru funcţia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Soluţie. Deoarece f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^3$, rezultă că toate punctele de extrem local se află printre punctele staţionare ale lui f. Rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

se obţine un singur punct staţionar : $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$.

Hessiana funcţiei *f* este aceeaşi în fiecare punct din $\mathbb{R}^3$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

deci $H_f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculând determinanţii principali obţinem $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ şi $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$.

Deducem că punctul staţionar $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ este punct de minim local pentru funcţia *f*.

Exerciţiul 4.2.9. Să se determine punctele de extrem local pentru funcţia
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 2xy - 4yz + 20x$.

Soluţie. În acest caz $D = D_1 = \mathbb{R}^3$. Funcţia *f* fiind de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^3$, toate punctele de extrem local pentru *f* se află printre punctele staţionare ale lui *f*.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - 2y + 20 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 2x - 4z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{15}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 5 \end{cases}$$

Prin urmare funcţia *f* are un singur punct staţionar $\left(-\frac{15}{2},\frac{5}{2},5\right)$. Deoarece derivatele parţiale de ordinul doi sunt constante, hessiana funcţiei *f* este aceeaşi în orice punct din $\mathbb{R}^3$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii se obţin rezolvând ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă $(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda - 16) = 0$. Se obţine $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 2(1 + \sqrt{5}) > 0$,

$\lambda_3 = 2(1 - \sqrt{5}) < 0$.

Prin urmare punctul $\left(-\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 5\right)$ este punct staţionar pentru *f*, dar nu este punct de extrem local pentru această funcţie. Având în vedere că orice punct de extrem local trebuie să fie punct staţionar deducem că *f* nu are puncte de extrem local.

Exerciţiul 4.2.10. Să se determine punctele de extrem local pentru funcţia
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$.

Soluţie. Funcţia *f* este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$ şi are o infinitate de puncte staţionare.

Într-adevăr, rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ adică

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 \\ 12x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 \end{cases}$$

se obţin următoarele puncte staţionare: $(\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$; $(3, 2)$.

Derivatele parţiale de ordinul doi sunt :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 36xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 36x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12x^3 - 2x^4 - 6x^3y$.

Se obţin următoarele matrici hessiene:

$H(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12\alpha^3 - 2\alpha^4 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$H(0, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$ şi $H(3, 2) = \begin{pmatrix} -144 & -108 \\ -108 & -162 \end{pmatrix}$.

Punctul (3, 2) este punct de maxim local pentru *f* deoarece $\Delta_1 = -144 < 0$, $\Delta_2 = 2^4 \cdot 3^6 > 0$. Pentru a decide natura celorlalte puncte staţionare nu se poate folosi teorema 4.1.3.6. Deoarece aplicarea formulei Taylor este anevoioasă (primele derivate nenule în (0, 0) sunt de ordinul 5), studiem direct semnul creşterilor $f(x, y) - f(\alpha, 0)$ şi $f(x, y) - f(0, \beta)$.

Evident, $sgn[f(x, y) - f(\alpha, 0)] = sgn[x(6 - x - y)]$.

Dacă $\alpha < 0$ atunci există $V_1 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât $f(x, y) - f(\alpha, 0) < 0$ pentru orice $(x, y) \in V_1$ deci orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha < 0$ este punct de maxim local pentru *f*.

Dacă $\alpha = 0$ există $V_2 \in \mathcal{V}(0, 0)$ astfel încât $6 - x - y > 0$ pentru orice $(x, y) \in V_2$, deci pentru orice $(x, y) \in V_2$, $sgn[f(x, y) - f(\alpha, 0)] = sgn(x)$.

Este evident că $f(x, y) - f(\alpha, 0)$ nu păstrează semn constant pe nici o vecinătate a lui (0, 0) ceea ce arată că (0, 0) nu este punct de extrem pentru *f*.

Dacă $0 < \alpha < 6$, există $V_3 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât $f(x, y) - f(\alpha, 0) > 0$ pentru orice $(x, y) \in V_3$, deci orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha \in (0, 6)$ este punct de minim local pentru *f*.

Punctul $(6, 0)$ nu este punct de extrem local pentru *f*. Într-adevăr, există $V_4 \in \mathcal{V}(6, 0)$ conţinută în întregime în semiplanul $x > 0$. Pentru orice $(x, y) \in V_4$, $sgn[f(x, y) - f(6, 0)] = sgn(6 - x - y)$. Este evident acum că
$f(x, y) - f(6, 0)$ nu păstrează semn constant în nici o vecinătate a punctului
(6, 0).

Dacă $\alpha > 6$, există $V_5 \in \mathcal{V}(\alpha, 0)$ astfel încât pentru orice $(x, y) \in V_5$ să avem $f(x, y) - f(\alpha, 0) < 0$ ceea ce arată că orice punct $(\alpha, 0)$ cu $\alpha > 6$ este punct de maxim local pentru f.

Analizăm la fel punctele $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Deoarece $sgn[f(x, y) - f(0, \beta)] = sgn[x(6 - x - y)]$ şi orice vecinătate a punctului $(0, \beta)$ intersectează atât semiplanul $x< 0$ cât şi semiplanul $x> 0$ rezultă că $f(x, y) - f(0, \beta)$nu are semn constant pe nici o vecinătate a nici unui punct $(0, \beta)$, deci nici un punct $(0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$ nu este punct de extrem local pentru f.

Exerciţiul 4.2.11. Să se determine punctele de extrem local pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$.

Soluţie. Funcţia are derivate parţiale pe mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x-y}, x > y \\ \dfrac{-1}{1+y-x}, x < y \end{cases} ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-1}{1+x-y}, x > y \\ \dfrac{1}{1+y-x}, x < y \end{cases}$$

Deoarece rapoartele: $R_1(x)= \dfrac{f(x,\alpha)-f(\alpha,\alpha)}{x-\alpha}$ şi

$R_2(x) = \dfrac{f(\alpha,y)-f(\alpha,\alpha)}{y-\alpha}$ nu au limită în punctul α, rezultă că f nu este derivabilă parţial nici în raport cu x, nici în raport y, în punctul (α, α), $\alpha \in \mathbb{R}$.

Este evident că funcţia f nu are puncte staţionare.

Deoarece $f(x, y) - f(\alpha, \alpha) = f(x, y) = \ln(1 + |x - y|) \geq \ln 1 = 0$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rezultă (α, α) este punct de minim local şi global pentru f.

Prin urmare această funcţie are o infinitate de puncte de minim, nici un punct de maxim, nici un punct staţionar.

Exerciţiul 4.3.12. Să se demonstreze că originea este punct de minim global pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), y \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , y = 0 \end{cases}.$$

Soluţie. Deoarece $f(x, y) - f(0, 0) = y^2 \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right) \geq 0$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rezultă că $(0, 0)$ este punct de extrem global şi local pentru f. Nici în acest caz teorema 4.1.3.6. nu poate fi aplicată.

5. FUNCŢII IMPLICITE. EXTREME CONDIŢIONATE.

5.1. Noţiuni teoretice. Rezultate fundamentale.

5.1.1. Funcţii implicite.

În capitolele precedente am studiat funcţii de una sau mai multe variabile date sub formă explicită, adică de forma $y = f(x)$, unde f ne arată concret cum depinde y de x . Sunt situaţii însă când legătura între mărimile x şi y este dată implicit de o ecuaţie de forma $F(x, y) = 0$, explicitarea în raport cu y, de exemplu, nefiind posibilă întotdeauna în mod univoc.

În cele ce urmează vom arăta când este posibilă explicitarea unei ecuaţii $F(x, y) = 0$ şi ce proprietăţi putem deduce pentru explicitarea f (a cărei expresie analitică nu poate fi găsită în general) din proprietăţile funcţiei F.

Definiţia 5.1.1.1. Fie ecuaţia $F(x, y) = 0$ unde $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Fie D_x proiecţia lui D pe axa Ox şi fie $A \subseteq D_x$.

O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte *soluţie* sau *explicitare* (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ pe mulţimea A, dacă pentru orice $x \in A$, $F(x, f(x)) = 0$. Dacă există o singură explicitare f pentru ecuaţia $F(x, y) = 0$, funcţia f se numeşte *funcţie definită implicit* de ecuaţia $F(x, y)= 0$ sau, pe scurt, *funcţie implicită (de o variabilă)*

Teorema 5.1.1.1. Fie ecuaţia $F(x, y) = 0$ unde $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Fie $(x_0, y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1. $F(x_0, y_0) = 0;$
2. F este de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului $(x_0, y_0);$
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$

atunci

a) există $U \in \mathcal{V}(x_0)$, $V \in \mathcal{V}(y_0)$ şi o explicitare unică $f : U \to V$ (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ astfel încât $f(x_0) = y_0$;

b) explicitarea f este de clasă C^1 pe U şi pentru orice $x \in U$,

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Această teoremă poate fi extinsă uşor la funcţii implicite de mai multe variabile.

Definiţia 5.1.1.2. Fie ecuaţia $F(x_1, x_2, ..., x_p; y) = 0$, unde $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime cu proprietatea că pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in A$ există $y \in \mathbb{R}$ încât $(x, y) \in D$. O funcţie $f: A \to \mathbb{R}$ se numeşte *soluţie* sau *explicitare* (în raport cu y) a ecuaţiei $F(x_1, x_2, ..., x_p; y) = 0$ pe mulţimea A, dacă pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in A$ avem: $F(x_1, x_2, ..., x_p; f(x_1, x_2, ..., x_p)) = 0$. Dacă există o singură explicitare f a ecuaţiei date, funcţia f se numeşte *funcţie definită implicit* de ecuaţia $F(x_1, x_2, ..., x_p; y) = 0$ sau, pe scurt, *funcţie implicită* (de variabilele reale $x_1, x_2, ..., x_p$)

Observaţia 5.1.1.1. Dacă notăm $x=(x_1,x_2, ...,x_p)$ ecuaţia $F(x_1,x_2, ..., x_p; y)=0$ se poate scrie $F(x, y) = 0$ iar soluţia $y = f(x_1, x_2, ..., x_p)$ se scrie $y = f(x)$. Deci, putem considera numai ecuaţii de forma $F(x, y) = 0$ în care x este variabilă reală sau vectorială.

Teorema 5.1.1.2. Fie ecuaţia $F(x, y) = 0$, unde $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, definită pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$.

Fie $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, ..., x_p^0; y_0) \in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1) $F(x_0, y_0) = 0;$
2) F este de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ;
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$

atunci:

a) există $U\in\mathcal{V}(x_0)$, $V\in\mathcal{V}(y_0)$ şi o explicitare unică $f:U\to V$ a ecuaţiei $F(x, y) = 0$ (în raport cu y) încât $f(x_0) = y_0$;

b) explicitarea f este de clasă C^1 pe U şi pentru orice $x\in U$ şi orice $j = 1, 2, \ldots, p$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x,f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}.$$

Să considerăm acum problema funcţiilor definite implicit prin sisteme de ecuaţii.

Definiţia 5.1.1.3. Fie $F_i:D\to\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ funcţii date, definite pe mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^{p+m}$. Fie $A\subseteq\mathbb{R}^p$ o mulţime cu proprietatea că pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_p)$ există $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)\in\mathbb{R}^m$ astfel încât $(x, y)\in D$. Un sistem de funcţii $\{f_i:A\to\mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m\}$ se numeşte *soluţie* sau *explicitare* (în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_m$) pe mulţimea A a sistemului de ecuaţii $F_i(x, y) = 0, i = 1, 2, \ldots, m$ dacă
$F_i(x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) = 0$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, m$ şi orice $x\in A$.

Dacă sistemul de ecuaţii dat are pe mulţimea A o singură soluţie $\{f_1, f_2,\ldots, f_m\}$, spunem că funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt *definite implicit de sistemul de ecuaţii* dat sau, pe scurt, sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ este un *sistem de funcţii implicite* (de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_p$)

Observaţia 5.1.1.2. Dacă pentru simplificarea scrierii, se notează
$x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $F = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$, atunci F este o funcţie vectorială definită pe mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^{p+m}$ cu valori în $\mathbb{R}^m$, iar sistemul se scrie mai simplu:

$$F(x, y) = \theta_{\mathbb{R}^m}$$

Dacă se notează $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ atunci f este o funcţie vectorială definită pe mulţimea deschisă $A\subseteq\mathbb{R}^p$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. A spune că sistemul de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ este o soluţie a sistemului de ecuaţii dat revine la a spune că funcţia vectorială f este o soluţie a ecuaţiei vectoriale

$$F(x, y) = \theta_{\mathbb{R}^m}$$

adică $F(x, f(x)) = \theta_{\mathbb{R}^m}$ pentru orice $x\in A$. În acest fel, un sistem de m funcţii implicite reale, definite de un sistem de m ecuaţii, este echivalent cu o singură funcţie implicită vectorială, definită de o ecuaţie vectorială. Se poate extinde acum uşor, teorema de explicitare de la ecuaţii la sisteme.

Teorema 5.1.1.3. Fie sistemul:

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

unde $F_i : D\to\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sunt funcţii date, definite pe mulţimea deschisă $D\subseteq\mathbb{R}^{p+m}$. Fie $(x_0, y_0) = (x_1^0,\ldots, x_p^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)\in D$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1) $F_i(x_0, y_0) = 0, i = 1, 2, \ldots, m$;
2) Funcţiile F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ sunt de clasă C^1 pe o vecinătate a punctului (x_0, y_0);
3) $\dfrac{D(F_1,F_2,\ldots,F_m)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_m)}(x_0, y_0)\neq 0$,

atunci

a) există $U\in\mathcal{V}(x_0)$, $V\in\mathcal{V}(y_0)$ şi o explicitare unică $f:U\to V$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ a sistemului dat astfel încât $f(x_0) = y_0$;

b) funcţiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sunt de clasă C^1 pe U şi

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = -\frac{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_i,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,x_j,\ldots,y_m)}(x,f(x))}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_i,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_m)}(x,f(x))}$$

pentru orice $x\in U$, $i =1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, p$.

(determinantul de la numărător se obţine din jacobianul de la numitor prin înlocuirea coloanei derivatelor în raport cu y_i cu coloana derivatelor în raport cu x_j).

Observaţia 5.1.1.3. a) Oricare dintre cele trei teoreme anterioare reprezintă o teoremă de existenţă a funcţiei implicite f (scalare sau vectoriale, de una sau mai multe variabile); sunt date condiţii suficiente care

asigură existenţa funcţiei implicite, de clasă C^1, fără a da o metodă efectivă de explicitare, acest lucru nefiind, în general, posibil.

b) Punctele critice ale funcţiei $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia $F(x,y)= 0$ se determină punând condiţia necesară $y' = 0$, adică rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \end{cases}$$

Pentru precizarea punctelor de extrem se află semnul lui y'' în fiecare din punctele critice.

c) Dacă $F : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^2 pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte local, în condiţiile teoremei 5.1.1.2., o funcţie $z = z(x, y)$, astfel încât să aibă loc identitatea $F(x, y; z(x, y)) = 0$; deşi, în general, această funcţie nu se poate explicita efectiv, se pot calcula derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi ale lui z, iar pentru a determina extremele locale ale funcţiei z, se determină mai întâi punctele critice, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0 \end{cases}$$

Se determină apoi semnul expresiei $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$ în fiecare dintre punctele critice, apoi semnul lui $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ în fiecare dintre punctele în care această expresie este strict pozitivă.

5.1.2. Transformări punctuale în $\mathbb{R}^p$. Schimbări de coordonate.

Se ştie că o funcţie reală de o variabilă reală f este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă, iar, în anumite condiţii, unele proprietăţi ale funcţiei f se transmit funcţiei inverse f^{-1}. A determina f^{-1} este echivalent cu a explicita, în raport cu x, ecuaţia $f(x) - y = 0$.

Pentru funcţii de mai multe variabile, problema inversării este mai complicată. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $f : A \to \mathbb{R}^m$ este o funcţie vectorială de componente $f_1, f_2, \dots, f_m$, ecuaţia vectorială $f(x) - y = \theta_{\mathbb{R}^m}$ este echivalentă cu sistemul

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_p) - y_i = 0,\ i = 1, 2, \dots, m$$

iar determinarea inversei (atunci când există) revine la explicitarea sistemului în raport cu variabilele $x_1, x_2, \dots, x_p$. Conform celor prezentate în teorema 5.1.1.3., numărul variabilelor ce pot fi explicitate coincide cu numărul de ecuaţii; prin urmare, trebuie ca $m = p$, iar pentru a putea utiliza teorema 5.1.1.3. trebuie considerate funcţii de clasă C^1. De aceea, în cele ce urmează, considerăm $A \subseteq \mathbb{R}^p$ mulţime deschisă, $T : A \to \mathbb{R}^p$ de clasă C^1 pe A şi căutăm condiţii care să asigure existenţa inversei $T^{-1}: B \to A$, unde $B = T(A)$, precum şi diferenţiabilitatea lui T^{-1}.

Definiţia 5.1.2.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^p$ mulţimi deschise.

O aplicaţie $T: A \to B$ de clasă C^1 pe A se numeşte *transformare punctuală* de la A la B.

Prin aplicaţia T,de componente $f_1, f_2, ..., f_p$,oricărui punct $x=(x_1, x_2, ..., x_p) \in A$ îi corespunde un punct bine determinat $y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in B$ unde $y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_p), ..., y_p = f_p(x_1, ..., x_p)$ ceea ce justifică denumirea de transformare punctuală.

Definiţia 5.1.2.2. Fie $A\subseteq \mathbb{R}^p$, $B\subseteq \mathbb{R}^p$ mulţimi deschise. O transformare punctuală $T:A \to B$ se numeşte *difeomorfism* (sau *transformare regulată*) dacă T este bijectivă şi inversa ei $T^{-1}: B\to A$ este o transformare punctuală de la B la A.

Aplicând teorema 5.1.1.3. pentru sistemul $f_i(x_1, ..., x_p) - y_i = 0$, $i = 1, 2, ..., p$, în teorema următoare sunt date condiţii suficiente pentru ca transformarea punctuală T, de componente $f_1, f_2, ..., f_p$ să aibă o restricţie inversabilă, iar inversa să fie tot o transformare punctuală, adică, local, să fie difeomorfism.

Teorema 5.1.2.1. (de inversiune locală) Fie $T : A\to \mathbb{R}^p$ o transformare punctuală, de componente $f_1, f_2, ..., f_p$, pe mulţimea deschisă $A\subseteq \mathbb{R}^p$ şi fie $x_0\in A$ un punct astfel încât

$$\frac{D(f_1, f_2,..., f_p)}{D(x_1, x_2,..., x_p)}(x_0) \neq 0$$

Atunci există o vecinătate deschisă U_0 a punctului x_0 şi o vecinătate deschisă V_0 a punctului $y_0 = T(x_0)$, astfel ca T să fie difeomorfism de la U_0 la V_0.

Observaţia 5.1.2.1. a) Dacă $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sunt componentele transformării inverse T^{-1}, ţinând seama de observaţia 4.1.4.1. b), avem:

$$\frac{D(f_1, f_2,..., f_p)}{D(x_1, x_2,..., x_p)}(x_0)\cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_p)}{D(y_1, y_2,..., y_p)}(T(x_0)) = 1 ,$$

adică :

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2,..., \varphi_p)}{D(y_1, y_2,..., y_p)}(T(x_0)) = \left[\frac{D(f_1, f_2,..., f_p)}{D(x_1, x_2,..., x_p)}(x_0)\right]^{-1}$$

Această egalitate corespunde formulei care dă derivata funcţiei inverse a unei funcţii derivabile de o variabilă. Deci, din acest punct de vedere, în cazul transformărilor punctuale, rolul derivatei îl joacă jacobianul transformării.

b) Rezultatul stabilit în teorema 5.1.2.1. are un caracter local, chiar dacă jacobianul transformării este nenul în orice punct din A. De exemplu, dacă $T : \mathbb{R}^2\to \mathbb{R}^2$ este transformarea dată prin $x(r, \theta) = r\cos \theta$, $y(r, \theta) = r\sin \theta$ jacobianul transformării T este $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = r$; conform teoremei 5.1.2.1., orice punct (r, θ) cu $r \neq 0$ are o vecinătate în care transformarea T este bijectivă, dar T nu este bijectivă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ din cauza periodicităţii funcţiilor *sin* şi *cos*, imaginile punctelor diferite $(r, \theta), (r, \theta + 2\pi)$ coincid, deci T nu este injectivă.

Definiţia 5.1.2.3. Fie $A\subseteq \mathbb{R}^p$ o mulţime deschisă. O transformare punctuală injectivă $T : A\to \mathbb{R}^p$ care stabileşte un difeomorfism de la A la $B = T(A)$ se numeşte *schimbare de coordonate* în A. Dacă $f_1, f_2, ..., f_p$ sunt componentele lui T, atunci pentru orice $x\in A$, numerele $f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)$ se numesc *coordonatele lui x în sistemul de coordonate T.*

Exemplul 5.1.2.1. Fie $A = \{(x, y)\in \mathbb{R}^2: x > 0 \text{ şi } y> 0\}$.

Aplicaţia $T : A\to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (r, \theta)$ unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = arctg\ \frac{y}{x}$ este o schimbare de coordonate, numită trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare în A.

Observaţia 5.1.2.2. Teorema 5.1.2.1. afirmă că, dacă T este o transformare punctuală cu jacobianul nenul într-un punct x_0, atunci, local, (într-o vecinătate a lui x_0) T este o schimbare de coordonate.

5.1.3. Extreme condiţionate. Puncte de extrem global.

Ne punem mai întâi problema determinării extremelor unei funcţii luând în considerare valorile acesteia doar în punctele care îndeplinesc anumite condiţii suplimentare date. De exemplu, dacă se cere să

se determine acel punct al planului $x + y + z = 1$ care se află la cea mai mică distanţă faţă de origine, trebuie să determinăm, evident, minimul funcţiei $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ luând în considerare doar tripletele (x, y, z) care îndeplinesc condiţia $x + y + z = 1$. Aceasta este o problemă simplă de extrem condiţionat. O cale naturală de rezolvare este următoarea: se explicitează ecuaţia dată în raport cu z, de exemplu, se introduce z în expresia funcţiei şi se obţine o problemă de extrem obişnuit pentru funcţia de două variabile obţinută (care reprezintă restricţia funcţiei d la planul considerat). Deoarece practic această explicitare, în general, nu este realizabilă, se recurge la o metodă indirectă, bazată pe teorema funcţiilor implicite, pe care o vom prezenta în continuare.

Definiţia 5.1.3.1. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$ o mulţime deschisă , $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe D. Presupunem că între variabilele $x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m$ există m condiţii (restricţii, legături): $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, i = 1, 2, ..., m$, unde $g_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ sunt de clasă C^1 pe D. Fie

$$M = \{(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) \in D:\ g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0,\ i = 1, 2, ..., m\}$$

Se numeşte *punct de extrem local al funcţiei f condiţionat de* $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, i = 1, 2, ..., m$ orice punct $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0) \in M$ pentru care există o vecinătate $V \subseteq D$, încât diferenţa $f(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) - f(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ să aibă semn constant pe $M \cap V$.

Utilizând teorema 5.1.1.3. pentru sistemul $g_i(x_1,..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$, teorema care urmează dă condiţii necesare ca un punct să fie punct de extrem local condiţionat pentru o funcţie dată.

Teorema 5.1.3.1. (Lagrange) Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$. Fie $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0) \in D$ un punct de extrem local al funcţiei f, condiţionat de legăturile $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0,\ i = 1, 2, ..., m$ unde funcţiile $g_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$ sunt de clasă C^1 pe D şi

$$\frac{D(g_1, g_2, ..., g_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)}(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0) \neq 0$$

Atunci există m numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ astfel încât punctul $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ să fie punct critic pentru funcţia

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_m g_m$$

(Numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se numesc *multiplicatori Lagrange*, iar funcţia F se numeşte *funcţie Lagrange*)

Observaţia 5.1.3.1. Dacă

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_p) = f(x_1, ..., x_p; y_1(x_1, ..., x_p), ..., y_m(x_1, ..., x_p))$$

unde $y_1 = y_1(x_1, ..., x_p)$, $y_2 = y_2(x_1, ..., x_p)$, ..., $y_m = y_m((x_1, ..., x_p))$ sunt explicitări locale ale sistemului $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0,\ i = 1, 2, ..., m$ atunci funcţia Φ reprezintă restricţia funcţiei f la mulţimea M şi, evident, $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ este punct de extrem local pentru f, condiţionat de $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0,\ i = 1, 2, ..., m$ dacă şi numai dacă $(x_1^0, ..., x_p^0)$ este punct de extrem local pentru funcţia Φ. Prin urmare, în practică, teorema 5.1.3.1. se aplică astfel: fiind date funcţia f şi legăturile $g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0,\ i = 1, 2, ..., m$ se consideră funcţia Lagrange $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_m g_m$ cu numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ nedetrminate; se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, j = 1, 2, ..., p \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_i}(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, i = 1, 2, ..., m \\ g_i(x_1, ..., x_p; y_1, ..., y_m) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

Acest sistem are $p + 2m$ ecuaţii şi $p + 2m$ necunoscute. Dacă $x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$ este o soluţie a acestui sistem, atunci $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ este punct critic pentru funcţia Lagrange F corespunzătoare multiplicatorilor $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_m^0$. Pentru a vedea dacă $(x_1^0, ..., x_p^0; y_1^0, ..., y_m^0)$ este punct de extrem condiţionat pentru f este suficient să verificăm dacă $(x_1^0, ..., x_p^0)$ este punct de extrem local pentru funcţia Φ; dacă f şi g_i, $i = 1, 2, ..., m$ sunt funcţii de clasă C^2 putem studia hessiana funcţiei Φ în punctul $(x_1^0, ..., x_p^0)$.

Definiţia 5.1.3.2. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară $x_0 \in A$. Punctul x_0 se numeşte *punct de extrem global* al funcţiei f dacă diferenţa $f(x) - f(x_0)$ are semn constant pe A. Mai precis, punctul x_0 se numeşte *punct de maxim* (respectiv *minim*) *global* al lui f dacă pentru orice $x \in A$ avem $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (respectiv $f(x) - f(x_0) \geq 0$)

Observaţia 5.1.3.2. Dacă f este de clasă C^1 pe A atunci f este diferenţiabilă şi, prin urmare, continuă pe A. Ţinând seama de teorema 3.1.5.4., dacă A este compactă atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe A. Prin urmare, există $x_*, x^* \in A$ astfel încât $f(x_*) = \inf f(A)$, $f(x^*) = \sup f(A)$. Evident, x_* este punct de minim global, iar x^* este punct de maxim global pentru funcţia f. Dacă $Int(A)$ reprezintă interiorul mulţimii A, iar $Fr(A)$ reprezintă frontiera mulţimii A, atunci:

$$Int(A) = \{ x \in A : \exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset A \}$$

$$Fr(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \text{ şi } V \cap CA \neq \emptyset \}$$

Deoarece A este compactă (deci mărginită şi închisă) avem:

$A = Int(A) \cup Fr(A)$.

Deoarece $x_* \in A$ deducem că $x_* \in Int(A)$ sau $x_* \in Fr(A)$.

Dacă $x_* \in Int(A)$, atunci x_* este punct de minim local pentru f, iar dacă $x_* \in Fr(A)$, presupunând că $Fr(A)$ poate fi definită prin ecuaţii carteziene, atunci x_* este punct de minim pentru f, condiţionat de aceste ecuaţii. O discuţie asemănătoare are loc pentru x^*.

Astfel, dacă se cer marginile unei funcţii de clasă C^1 pe o mulţime compactă A (punctele de extrem global) se aplică teorema lui Fermat pentru a determina punctele de extrem local situate în interiorul mulţimii compacte şi teorema lui Lagrange pentru cele care se află pe frontieră. Având asigurată existenţa punctelor x_*, x^* (prin teorema 3.1.5.4.) este suficient să calculăm valorile funcţiei f în toate punctele staţionare determinate şi să reţinem valorile extreme.

5. FUNCŢII IMPLICITE. EXTREME CONDIŢIONATE.

5.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 5.2.1. Să se determine y' şi y'' dacă $y = y(x)$ este o funcţie definită implicit de ecuaţia $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$.

Soluţie. Fie $F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1$, $(x, y)\in \mathbb{R}^2$. Evident F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 6x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 6y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1)$$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)= 0$ dacă şi numai dacă $y = 0$ sau $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Prin urmare, ecuaţia $F(x, y)= 0$ defineşte pe y ca funcţie de x în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0) din mulţimea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \neq 0, x^2 + y^2 - 1 \neq 0\}$ care verifică ecuaţia dată. Pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului x_0 ecuaţia dată are soluţie unică $y(x)$. Obţinem, $y' = -\frac{x}{y}$.

Calculul direct arată că $y'' = -\frac{y - x\cdot y'}{y^2} = -\frac{y + x\cdot\frac{x}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$.

Exerciţiul 5.2.2. Să se determine derivatele parţiale de ordinul întâi şi al doilea ale unei funcţii z definită implicit de ecuaţia: $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$

Soluţie. Fie $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y$. Evident, F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = - 4y - z + 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 6z - y$. Ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte pe z ca funcţie de variabilele x, y în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0, z_0) din mulţimea $D = \{(x, y, z): F(x, y, z) = 0, 6z - y \neq 0\}$

Pentru orice (x, y) dintr-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) ecuaţia dată are soluţie unică $z(x, y)$. Calculul direct arată că:

$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x}{6z - y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{-4y - z + 1}{6z - y}$. Derivând încă o dată, ţinând seama că $z = z(x, y)$ obţinem :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2(6z - y) - 2x\cdot 6\frac{\partial z}{\partial x}}{(6z - y)^2} = -\frac{2(6z - y) + 2x\cdot 6\frac{2x}{6z - y}}{(6z - y)^2} = -\frac{2(6z - y)^2 + 24x^2}{(6z - y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(6z - y) - (-4y - z + 1)\cdot 6\frac{\partial z}{\partial x}}{(6z - y)^2} = \frac{2x(25y - 6)}{(6z - y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\left(-4 - \frac{\partial z}{\partial y}\right)(6z - y) - (-4y - z + 1)\left(6\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)}{(6z - y)^2} =$$

$$= \frac{150z^2 - 50yz + 50y - 100y^2 - 6}{(6z - y)^3}.$$

Printr-un calcul asemănător se arată că $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Această egalitate se poate deduce observând că *F* este de clasă C^2, de unde deducem că *z* este de clasă C^2 şi, prin urmare, derivatele mixte sunt egale.

Exerciţiul 5.2.3. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2)$ dacă *z* este funcţia definită implicit de ecuaţia $x^2 + 2y^2 + 3z^3 + xy - z - 9 = 0$ şi de condiţia $z(1, -2) = 1$.

Soluţie. Funcţia $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 + xy - z - 9$ şi punctul (1, -2, 1) satisfac condiţiile teoremei 5.1.1.2.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} = -\frac{2x + y}{9z^2 - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))} = -\frac{4y + z}{9z^2 - 1}$$

pentru orice *(x, y)* dintr-o vecinătate a punctului (1, -2).

Atunci $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{(9z^2 - 1) - (4y + z)\left(18z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(9z^2 - 1)^2}$.

Deoarece $z(1, -2) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) = 0$ rezultă $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2) = -\frac{8}{8^2} = -\frac{1}{8}$.

Exerciţiul 5.2.4. Să se determine derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi ale funcţiilor $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} u + v - x - y = 0 \\ xu + yv - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluţie. Fie $F_1(x, y, u, v) = u + v - x - y$ şi $F_2(x, y, u, v) = xu + yv - 1$

Calcule simple arată că:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial F_1}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial F_1}{\partial v} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = u,\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = v,\ \frac{\partial F_2}{\partial u} = x,\ \frac{\partial F_2}{\partial v} = y$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y \end{vmatrix} = -y - u$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, v)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ v & y \end{vmatrix} = -y - v$$

Rezultă că $\frac{\partial u}{\partial x}$ = - $\frac{-y-u}{y-x}$ = $\frac{y+u}{y-x}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}$ = $\frac{y+v}{y-x}$ pentru $y - x \neq 0$. Analog $\frac{\partial v}{\partial x}$ = - $\frac{u+x}{y-x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ = - $\frac{v+x}{y-x}$.

Derivatele de ordinul doi se calculează folosind regula de derivare a câtului şi ţinând seama că $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+u}{y-x}\right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(y-x)-(y+u)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{2(y+u)}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y+v}{y-x}\right) = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}(y-x)-(y+v)(-1)}{(y-x)^2} = \frac{-u-x+y+v}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y+v}{y-x}\right) = \frac{\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)(y-x)-(y+v)}{(y-x)^2} = \frac{-2(x+v)}{(y-x)^2}$$

Analog se determină $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

Exerciţiul 5.2.5. Să se determine extremele unei funcţii implicite $y = y(x)$ definită de ecuaţia $x^3 + 8y^3 - 6xy = 0$.

Soluţie. Fie $F(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy$. Avem $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 6y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 24y^2 - 6x$.

Ecuaţia $F(x, y) = 0$ defineşte pe y ca funcţie implicită de variabila x în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0) din mulţimea

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^3 + 8y^3 - 6xy = 0, 4y^2 - x \neq 0\}$.

Pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului x_0 avem:

$$y'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2y}{4y^2-x}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x^3 + 8y^3 - 6xy = 0 \\ 4y^2 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt[3]{2} \\ y_0 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \end{cases}$$

$$y''(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-2y'(x))(4y^2-x)-(x^2-2y)(8y\cdot y'(x)-1)}{(4y^2-x)^2}$$

Deoarece $y'(x_0) = 0$, deducem că $y''(x_0) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2x_0}{(4y_0^2-x_0)} = -1 < 0$ şi deci $x_0 = \sqrt[3]{2}$ este punct de maxim pentru funcţia $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţia dată în vecinătatea acestui punct; valoarea maximă a lui y este $y(x_0) = y_0 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Exerciţiul 5.2.6. Să se determine extremele unei funcţii implicite $z = z(x, y)$ definită de ecuaţia

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$$

Soluţie. Fie $F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72$.

Evident, în orice punct $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, avem: $\frac{\partial F}{\partial x} = 10x - 2y - 2z$,

$\frac{\partial F}{\partial y} = 10y - 2x - 2z$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 10z - 2x - 2y$. Deci F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$.

Ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte pe z ca funcţie implicită de variabilele x şi y în vecinătatea oricărui punct (x_0, y_0, z_0) din mulţimea

$$D = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : 5x^2+5y^2+5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0,\ 10z - 2x - 2y \neq 0\}.$$

Avem $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{y+z-5x}{5z-x-y}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{x+z-5y}{5z-x-y}$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-5x=0 \\ x+z-5y=0 \\ 5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0 \\ 5z-x-y\neq 0 \end{cases}$$

adică $\begin{cases} x = y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = y = -1 \\ z = -4 \end{cases}$.

Derivatele parţiale de ordinul doi ale lui z sunt :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 5\right)(5z-x-y) - (y+z-5x)\left(5\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)}{(5z-x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y} - 5\right)(5z-x-y) - (x+z-5y)\left(5\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)}{(5z-x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)(5z-x-y) - (x+z-5y)\left(5\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)}{(5z-x-y)^2}$$

Ţinând cont de teorema 5.1.1.2. ecuaţia dată defineşte în mod unic pe z ca funcţie de x şi y pe o vecinătate a punctului (1, 1, 4). Punctul (1, 1) este punct critic pentru această funcţie şi $z(1, 1) = 4$. Hessiana lui z în (1, 1) este

$$H_z(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -\frac{5}{18} < 0$ şi $\Delta_2 = \frac{24}{18^2} > 0$. Prin urmare, (1, 1) este punct de maxim local pentru funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia dată în vecinătatea acestui punct, iar valoarea maximă este $z(1, 1) = 4$.

Analog, $(-1, -1)$ este punct critic pentru unica funcţie $z = z(x, y)$ obţinută aplicând teorema 5.1.1.2. ecuaţiei date şi punctului $(-1, -1)$. Hessiana acestei funcţii este

$$H_z(-1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

Deoarece $\Delta_1 = \frac{5}{18} > 0$ şi $\Delta_2 = \frac{24}{18^2} > 0$ rezultă că (-1, -1) este punct de minim pentru această funcţie. Valoarea minimă este $z(-1,-1) = -4$.

Exerciţiul 5.2.7. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z) = x + y + z$ condiţionate de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Soluţie. Fie $F(x, y, z) = x + y + z + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1\right)$ cu $x \neq 0, y \neq 0,$ $z \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Rezolvând sistemul
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y) = 1 - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0 \end{cases}$$
se obţin soluţiile $\lambda_1 = 9$, $x_1 = y_1 = z_1 = 3$.
$\lambda_2 = 1$, $x_2 = y_2 = 1$, $z_2 = -1$
$\lambda_2 = 1$, $x_3 = z_3 = 1$, $y_3 = -1$
$\lambda_2 = 1$, $y_4 = z_4 = 1$, $x_4 = -1$

Fie $\Phi(x, y) = F(x, y, z(x, y))$ restricţia lui F la mulţimea

$$M = \{(x, y, z): \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1\}$$

Atunci $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$ unde $z = z(x, y)$ este definită implicit de restricţia $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Derivând restricţia în raport cu x (respectiv y) obţinem $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z^2}{x^2}$ (respectiv $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2}{y^2}$).

Rezultă că $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \frac{z^2}{x^2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 - \frac{z^2}{y^2}$. Calculând derivatele parţiale de ordinul doi obţinem:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{2z^2(z+x)}{x^4}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{2z^3}{x^2 y^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{2z^2(z+y)}{y^4}$$

Obţinem $H_\Phi(3, 3) = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$. Deoarece $\Delta_1 = \frac{4}{3} > 0$, $\Delta_2 = \frac{4}{3} > 0$ rezultă că (3, 3) este punct de minim pentru Φ, deci (3, 3, 3) este punct de minim condiţionat pentru f.

$H_\Phi(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $H_\Phi(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ şi $H_\Phi(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

În aceste cazuri valorile proprii sunt soluţii ale ecuaţiei $\lambda^2 - 4 = 0$ adică $\lambda_{1,2} = \pm 2$, ceea ce arată că punctele staţionare (1, 1, -1), (1, -1, 1) şi
(-1, 1, 1) nu sunt puncte de extrem condiţionat.

Exerciţiul 5.2.8. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y, z) = xyz$ condiţionate de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$şi $x + y + z = 0$.

Soluţie: Fie $F(x, y, z) = xyz + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$ cu
$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Adunând primele trei ecuaţii şi ţinând cont de ultima, obţinem
$xy + xz + yz + 3\lambda_2 = 0$, iar din

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

rezultă $xy + xz + yz = -\frac{1}{2}$ deci $\lambda_2 = \frac{1}{6}$.

Scăzând primele două ecuaţii obţinem $(y - x)(z - 2\lambda_1) = 0$. Dacă $y = x$ obţinem punctele $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Considerând acum $z = 2\lambda_1$, înmulţind prima ecuaţie cu x, a doua cu y, a treia cu z şi adunând rezultă $\begin{cases} 3xyz + 2\lambda_1 = 0 \\ z = 2\lambda_1 \end{cases}$.

Deci $3xyz + z = 0$ de unde $z = 0$ sau $3xy = -1$.

Se observă că $z = 0$ nu convine, iar din $\begin{cases} 3xy = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ se obţin soluţiile

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

λ_1 se calculează în fiecare caz din relaţia $3xyz + 2\lambda_1 = 0$. Fie acum

$\Phi(x) = f(x, y(x), z(x))$, unde $y = y(x)$, $z = z(x)$ sunt explicitări locale ale sistemului de restricţii $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

Rezultă că $\Phi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(x) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z'(x)$. Derivând membru cu membru restricţiile rezultă

$$\begin{cases} 2x + 2y \cdot y'(x) + 2z \cdot z'(x) = 0 \\ 1 + y'(x) + z'(x) = 0 \end{cases}$$

de unde $y'(x) = \frac{z - x}{y - z}$ şi $z'(x) = \frac{x - y}{y - z}$.

Cum $\frac{\partial f}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$ obţinem $\Phi'(x) = yz - xy - xz + x^2$ şi $\Phi''(x) = y'z + yz' - y - xy' - z - xz' + 2x = 2(2x - y - z)$. Deoarece $\Phi''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{6}{\sqrt{6}} > 0$ rezultă că $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ şi $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sunt puncte de minim condiţionat. Valoarea minimă este $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Analog, deoarece $\Phi''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{6}} < 0$ deducem că punctele $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sunt puncte de maxim condiţionat, iar valoarea maximă este $\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Punctele $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ şi $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ trebuie analizate separat deoarece ele nu satisfac condiţia $y \neq z$.

În vecinătatea fiecăruia dintre ele sistemul de restricţii defineşte implicit pe x şi pe y ca funcţie de z.

Derivând în raport cu z sistemul de restricţii obţinem:

$$\begin{cases} 2x \cdot x'(z) + 2y \cdot y'(z) + 2z = 0 \\ x'(z) + y'(z) + 1 = 0 \end{cases}$$

adică $\begin{cases} x'(z) = \frac{y - z}{x - y} \\ y'(z) = \frac{z - x}{x - y} \end{cases}$, $x \neq y$.

Restricţia funcţiei f la mulţimea M poate fi scrisă acum astfel:
$\psi(z) = f(x(z), y(z), z)$.
Deci $\psi'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(z) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(z) + \frac{\partial f}{\partial z} = z^2 - yz - xz + xy$, $x \neq y$.
$\psi''(z) = 2z - y'z - y - x'y - x + x'y + xy' = 2(2z - x - y)$.

Se observă că $\psi''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{6}{\sqrt{6}} > 0$, deci $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de minim condiţionat, iar valoarea minimă este $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$, în timp ce $\psi''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{6}{\sqrt{6}} < 0$, deci $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ este punct de maxim condiţionat, iar valoarea maximă este $\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Exerciţiul 5.2.9. Să se determine *inf f(A)* şi *sup f(A)* dacă $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$ şi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

Soluţie. Deoarece f este continuă, iar A este mulţime compactă, rezultă că marginile *inf f(A)* şi *sup f(A)* există şi sunt atinse.

Determinăm punctele staţionare ale lui f.

Sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 10x + 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y = 0 \end{cases}$ are soluţie unică $x = y = 0$.

Deci f are un singur punct staţionar $(0, 0)$ şi acesta se află în interiorul lui A.

Funcţia Lagrange este $F(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.Din sistemul

$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 10x + 3y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3x + 2y + 2\lambda x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ se obţin patru puncte staţionare pe frontiera lui A, anume

$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Calcule elementare arată că $f(0, 0) = 0$, $f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}$, $f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}$,

$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2}$ şi

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2}$.

Rezultă că *inf f(A)* $= f(0, 0) = 0$ şi

$$\sup f(A) = f\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{11}{2}.$$

Exerciţiul 5.2.10. Să se determine punctele curbei $x^2 + xy + y^2 = 1$ care sunt cele mai depărtate de origine.

Soluţie. Trebuie să determinăm punctele de extrem ale funcţiei
$f(x, y) = x^2 + y^2$ (pătratul distanţei de la (x, y) la $(0, 0)$) condiţionate de
$x^2 + xy + y^2 = 1$.

Funcţia Lagrange este $F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \lambda x + 2(1+\lambda)y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Soluţiile sunt: λ_1 = -2 cu două puncte staţionare (1, -1) şi (-1, 1) şi $\lambda_2 = -\dfrac{2}{3}$ cu două puncte staţionare $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Aplicând metoda prezentată în exerciţiul 5.3.9. se arată că (1, -1) şi (-1, 1) sunt puncte de maxim condiţionat.

Punctele $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ şi $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sunt puncte de minim condiţionat. Punctele cele mai depărtate de origine, situate pe curba dată sunt (1, -1) şi (-1, 1).

6. INTEGRALA SIMPLĂ.
INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU

6.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

6.1.1. Metoda lui Darboux de a defini integrala simplă

Fie [a, b] un interval. Descompunem intervalul [a, b] într-un număr oarecare de segmente, de lungimi arbitrare, prin punctele:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

Notăm cu *d* această descompunere şi o numim *diviziunea intervalului* [a, b].

Definiţia 6.1.1.1. Fie *d* o diviziune a intervalului [a, b] determinată de punctele $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$.

Se numeşte *norma diviziunii d* numărul :

$$\| d \| = \max \{x_i - x_{i-1} \,;\, i = 1, 2, \dots, p\}$$

Dacă *d'* este o altă diviziune a intervalului [a, b], spunem că *d'* este mai fină decât *d* şi o notăm *d'>d* dacă mulţimea punctelor care determină diviziunea *d* este inclusă în mulţimea punctelor care determină diviziunea *d'*.

Definiţia 6.1.1.2. Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie mărginită pe [a, b] şi fie *d* o diviziune a intervalului [a, b] determinată de punctele :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

Pentru fiecare i = 1, 2, …, p, fie $m_i = \inf \{f(x);\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ şi
$M_i = \sup \{f(x);\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Formăm sumele:

$$s(d) = \sum_{i=1}^{p} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S(d) = \sum_{i=1}^{p} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Suma s(d) se numeşte *suma inferioară Darboux*, iar S(d) se numeşte *suma superioară Darboux*, ataşată funcţiei f pe intervalul [a, b], corespunzătoare diviziunii *d* a intervalului.

Definiţia 6.1.1.3. Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Se numeşte *integrala inferioară Darboux* a funcţiei f pe intervalul [a, b] numărul:

$$\underline{I} = \sup \{s(d) \mid d \in \mathcal{D}\}$$

Se numeşte *integrala superioară Darboux* a funcţiei f pe intervalul [a, b] numărul:

$$\overline{I} = \inf \{S(d) \mid d \in \mathcal{D}\}$$

($\mathcal{D}$ este mulţimea tuturor diviziunilor posibile ale intervalului [a, b]).

Definiţia 6.1.1.4. Funcţia mărginită f : [a, b] → $\mathbb{R}$ se numeşte integrabilă pe [a, b], dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară Darboux pe acest interval. Valoarea lor comună se numeşte *integrala simplă* a funcţiei f pe intervalul [a, b], *în sens Darboux*. Se notează :

$$I = \underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema 6.1.1.1. *(Criteriul lui Darboux de integrabilitate)*

Fie f : [a, b] → R o funcţie mărginită. Funcţia f este integrabilă pe [a, b], dacă şi numai dacă, pentru orice ε > 0 există η > 0, încât pentru orice d ∈ D cu ‖ d ‖ < η avem S(d) – s(d) < ε.

6.1.2. Metoda lui Riemann de a defini integrala simplă

Definiţia 6.1.2.1. Fie f : [a, b] → R o funcţie arbitrară şi fie d o diviziune a intervalului [a, b] determinată de punctele $a= x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p= b$

Pentru fiecare i = 1, 2, …, p alegem $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Notăm
$\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p)$.

Suma $\sigma(d, \zeta) = \sum_{i=1}^{p} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ se numeşte *sumă Riemann* sau sumă integrală a funcţiei f pe intervalul [a, b] corespunzătoare diviziunii d şi alegerii punctelor intermediare ζ.

Definiţia 6.1.2.2. Funcţia f : [a, b] → R se numeşte *integrabilă în sens Riemann* pe [a, b], dacă există un număr real I cu proprietatea că pentru orice ε > 0 există η > 0, astfel încât oricare ar fi diviziunea d cu ‖ d ‖ < η şi oricare ar fi punctele intermediare $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p)$ să aibă loc inegalitatea
$| \sigma(d, \zeta) - I | < \varepsilon$.

Prin urmare funcţia f este integrabilă Riemann pe [a, b] dacă există în R $\lim_{\|d\|\to 0} \sigma(d,\zeta)$ şi această limită nu depinde de alegerea ζ a punctelor intermediare.

Numărul real I, a cărui unicitate se poate deduce uşor, se numeşte *integrala în sens Riemann* a funcţiei f pe intervalul [a, b].

Teorema 6.1.2.1. Dacă funcţia f : [a, b] → R este integrabilă în sens Riemann pe [a, b], atunci f este mărginită.

Prin urmare, dacă f este *nemărginită* pe [a, b], atunci f *nu este integrabilă* în sens Riemann pe [a, b].

Teorema 6.1.2.2. Fie f : [a, b] → R o funcţie mărginită. Atunci funcţia f este integrabilă în sens Darboux pe [a, b], dacă şi numai dacă f este integrabilă în sens Riemann pe [a, b]. Integrala în sens Darboux a funcţiei f pe [a, b] coincide cu integrala în sens Riemann a lui f pe [a, b].

6.1.3. Clase de funcţii integrale

Teorema 6.1.3.1. Fie f : [a, b] → R o funcţie continuă pe [a, b]. Atunci f este integrabilă pe [a, b].

Teorema 6.1.3.2. Fie f : [a, b] → R o funcţie monotonă. Atunci f este integrabilă pe [a, b].

Teorema 6.1.3.3. Fie f : [a, b] → R o funcţie mărginită care are un număr finit de puncte de discontinuitate. Atunci f este integrabilă pe [a, b].

6.1.4. Proprietăţi ale funcţiilor integrabile şi ale integralei

Teorema 6.1.4.1. Fie f : [a, b] → R o funcţie integrabilă pe [a, b]. Atunci f este integrabilă pe orice interval [c, d] ⊂ [a, b].

Teorema 6.1.4.2. *(Proprietatea de aditivitate a integralei faţă de interval).*

Fie f : [a, b] → R o funcţie arbitrară şi c ∈ (a, b). Atunci f este integrabilă pe [a, b], dacă şi numai dacă f este integrabilă pe [a,c] şi pe [c,b].

În acest caz avem $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Teorema 6.1.4.3. *(Proprietatea de liniaritate a integralei faţă de funcţie).*

Fie f, g : [a, b] → $\mathbb{R}$ două funcţii integrabile pe [a, b], α, β∈$\mathbb{R}$ arbitrare. Atunci funcţia αf + βg este integrabilă pe [a, b] şi

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

Teorema 6.1.4.4. Fie f, g : [a, b] → $\mathbb{R}$ două funcţii integrabile pe [a, b]. Atunci funcţia f •g este integrabilă pe [a, b].

Teorema 6.1.4.5. *(Proprietatea de monotonie a integralei)*

Fie f, g : [a, b] → $\mathbb{R}$ două funcţii integrabile pe [a, b], astfel incât f(x) ≤ g(x) pentru orice x∈[a, b]. Atunci avem :

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

În particular, dacă f(x) ≥ 0, pentru orice x∈[a, b], atunci

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 .$$

Teorema 6.1.4.6. Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe [a, b]. Atunci | f | este o funcţie integrabilă şi avem :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx .$$

Observaţia 6.1.4.1. Există funcţii care nu sunt integrabile, dar au modulul integrabil : funcţia f : [0, 1] → $\mathbb{R}$ definită prin f(x) = 1, dacă x∈[0, 1] ∩ $\mathbb{Q}$ şi f(x) = -1 , dacă x∈[0, 1] \ $\mathbb{Q}$ nu este integrabilă pe [0, 1], dar, evident, | f | este funcţie integrabilă pe [0, 1].

Teorema 6.1.4.7. *(Teorema de medie)*

Dacă f : [a, b] → $\mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă pe [a, b], a < b,

m = {f(x); x∈[a, b]}, M = sup {f(x); x∈[a, b]} atunci există μ ∈[m, M] astfel încât $\int_a^b f(x)dx$ = μ (b - a).

Dacă f este continuă pe [a, b], atunci există ζ ∈[a, b] astfel încât μ = f(ζ) şi formula de medie devine :

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)\,(b - a)$$

6.1.5. Metode de calcul al integralei simple

Metodele de calcul exact al integralei simple au la bază două teoreme fundamentale ale calculului integral, care stabilesc legătura dintre integrala simplă şi primitiva unei funcţii.

Definiţia 6.1.5.1. Dacă $J \subset \mathbb{R}$ este un interval, funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ *admite primitivă* pe J, dacă există o funcţie $F : J \to \mathbb{R}$, derivabilă pe J, încât F' = f.
Funcţia F se numeşte, în acest caz, *primitivă* a funcţiei f.

Observaţia 6.1.5.1. O condiţie necesară ca funcţia f să admită primitivă pe J este ca f să aibă proprietatea lui Darboux. Prin urmare, dacă f *nu are proprietatea lui Darboux* pe J, atunci f *nu admite primitivă* pe J. Mai general, o funcţie care are un punct de discontinuitate de speţa întâi pe J, nu admite primitivă pe J.

Teorema 6.1.5.1. Fie $f : J \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval compact inclus în J; fie $a \in J$ fixat şi fie funcţia $F : J \to \mathbb{R}$ definită prin

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Atunci :

1) Funcţia F este continuă pe J;
2) Funcţia F este derivabilă în orice punct $x_0 \in J$ în care funcţia f este continuă şi $F'(x_0) = f(x_0)$
   Prin urmare, dacă f este *continuă* pe J, atunci F este *o primitivă*

pentru f pe intervalul J.

Teorema 6.1.5.2. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă care admite primitive. Atunci, oricare ar fi F, o primitivă a lui f pe intervalul [a, b], avem:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ (formula Leibnitz-Newton)}$$

Observaţia 6.1.5.2. Formula Leibnitz-Newton reduce calculul integralei funcţiei f pe intervalul [a, b] la determinarea unei primitive F a funcţiei f pe acest interval. Cum pentru o clasă destul de largă de funcţii se poate determina primitive, rezultă că pentru o clasă destul de largă de funcţii putem calcula exact integrala.

Cu ajutorul formulei Leibnitz-Newton se pot demonstra formula de integrare prin părţi şi formula schimbării de variabilă care, în anumite condiţii, reduce calculul unor integrale la calculul altora, mai uşor de calculat.

Teorema 6.1.5.3. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile cu derivate integrabile. Atunci :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

(formula de integrare prin părţi)

Observaţia 6.1.5.3. Formula se aplică în cazul când integrala

$\int_z^b f'(x)g(x)dx$ este mai uşor de calculat decât $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ iar f' şi g se deduc şi ele uşor.

Teorema 6.1.5.4. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ o funcţie derivabilă, cu φ' integrabilă pe $[\alpha, \beta]$, în particular, φ de clasă C^1 pe $[\alpha, \beta]$. Atunci :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$$

(prima formulă de schimbare de variabilă)

Observaţia 6.1.5.4. Prima formulă de schimbare de variabilă reduce calculul integralei funcţiei $(f \circ \varphi) \bullet \varphi'$ la calculul integralei funcţiei f, în cazul când acesta din urmă este mai uşor. Funcţia φ realizează

“schimbarea de la variabila x la variabila t ”. În mod practic, dacă avem de calculat $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se caută mai întâi f şi φ care să satisfacă condiţiile teoremei şi astfel încât g(x) = f(φ(x))• φ’(x), apoi se aplică direct formula de mai sus. În unele probleme însă, funcţia g de integrat poate fi pusă sub forma g(x) = f(φ(x)).
În acest caz, evident că formula schimbării de variabilă de mai sus nu poate fi aplicată direct. Totuşi, în anumite condiţii mai restrictive, impuse funcţiei φ, se poate aplica indirect această formulă. Mai precis, are loc următoarea:

Teorema 6.1.5.5. Fie f : [a, b] $\in$ R o funcţie continuă, φ : [α, β] →[a, b] o funcţie bijectivă, astfel încât inversa sa φ^{-1} : [a, b] →[α, β] este derivabilă, iar derivata $(\varphi^{-1})'$ este integrabilă pe [a, b]; toate aceste condiţii sunt îndeplinite, dacă φ este de clasă C^1 pe [α, β] şi φ’(x) $\neq 0$, pentru orice
$x \in$ [α, β]. Atunci:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\cdot(\varphi^{-1})'(t)dt$$

(a doua formulă de schimbare de variabilă)

Observaţia 6.1.5.5. Nu se poate da o indicaţie general valabilă, totuşi, pentru anumite tipuri de funcţii se pot da metode standard de alegere a funcţiei φ.

Exemplul 6.1.5.1. Dacă g(x) $= \mathrm{R}\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}\right)$, $x \in$ [α, β], unde R(u, v) este o funcţie raţională, atunci alegând φ(x) $= \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională.

Exemplul 6.1.5.2. Dacă g(x) $= R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, $x \in$ [α, β], a$\neq 0$, unde R(u, v) este o funcţie raţională, atunci integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se poate reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională, folosind *substituţiile lui Euler*. Se deosebesc trei cazuri:

a) dacă a > 0 , se recomandă schimbarea determinată de $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t$
b) dacă c > 0 , se recomandă schimbarea determinată de $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$
c) dacă $b^2 - 4ac > 0$, se recomandă schimbarea determinată de $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$

unde x_1 este una dintre rădăcinile trinomului $ax^2 + bx + c$ (se presupune, evident, că $ax^2 + bx + c \geq 0$ pe intervalul [α, β]).

Exemplul 6.1.5.3. Dacă g(x) = R(sin x, cos x), $x \in$ [α, β], unde R(u, v) este o funcţie raţională, folosind funcţia φ(x) $= tg\,\frac{x}{2}$, integrala $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se reduce la o integrală dintr-o funcţie raţională.

Exemplul 6.1.5.4. Dacă $g(x) = x^m(ax^n + b)^p$, $x \in$ [α, β], unde a, b $\in$ R,
m, n, p $\in$ Q, $ax^n + b \geq 0$ pentru orice $x \in$ [α, β], atunci $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ se numeşte *integrală binomă* (Cebîşev) şi se poate calcula elementar numai în următoarele trei cazuri:

a) $p \in$ Z ; se foloseşte funcţia $\varphi(x)=x^{1/r}$, unde r este numitorul comun al numerelor raţionale m şi n.

b) $p \notin \mathbb{Z}$, dar $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$; se foloseşte funcţia $\varphi(x)=(ax^n+b)^{1/s}$, unde s este numitorul lui p.

c) $p \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ dar $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$; în acest caz se foloseşte funcţia $\varphi(x)=(a + bx^{-n})^{1/s}$, unde s este, de asemenea, numitorul lui p. În toate cele trei cazuri, integrala binomă se transformă într-o integrală dintr-o funcţie raţională.

Observaţia 6.1.5.6. Dacă în calculul integralei $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ alegem pentru schimbarea de variabilă o funcţie φ astfel încât g(x) = f(φ(x)), dar φ nu este inversabilă pe [α, β], atunci se descompune intervalul [α, β] într-un număr finit de subintervale, încât pe fiecare subinterval funcţia φ să aibă o restricţie inversabilă, se aplică a doua formulă de schimbare de variabilă pe fiecare subinterval, apoi se foloseşte proprietatea de aditivitate a integralei faţă de interval.

Observaţia 6.1.5.7. Metodele de calcul exact expuse mai sus presupun cunoscute primitivele anumitor funcţii. Există însă cazuri simple, când există primitivele, dar acestea nu pot fi exprimate cu ajutorul funcţiilor elementare: $\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \frac{e^x}{x}, \frac{1}{\ln x}, e^{x^2}$, sin x^2, cos x^2 etc. au primitive pe domeniul lor de definiţie (fiind continue), care însă nu pot fi determinate prin nici una din metodele elementare. De aceea sunt prezentate în continuare şi câteva *metode de calcul aproximativ al integralei simple*. Ideea acestor metode este sugerată de însăşi definiţia integralei : dacă
f : [a, b] → $\mathbb{R}$ este integrabilă, considerând un şir arbitrar $(d_n)_{n\in N}$ de diviziuni ale intervalului [a, b] cu $\lim_{n\to\infty}\|d_n\| = 0$ şi fixând pentru fiecare diviziune d_n o alegere a punctelor intermediare ζ^n, atunci şirul numeric $(\sigma_n)_{n\in N}$, unde $\sigma_n = \sigma(d_n, \zeta^n)$, converge la $\int_a^b f(x)dx$. Prin urmare, pentru a aproxima integrala, cu o anumită eroare, este suficient, să calculăm un anumit termen al şirului $(\sigma_n)_{n\in N}$. Particularizând modul de alegere al diviziunilor şi al punctelor intermediare, se obţin diferite metode de calcul aproximativ al integralelor.

Teorema 6.1.5.6. *(Metoda dreptunghiurilor)*

Fie f : [a, b] → $\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă. Considerăm o diviziune d a intervalului [a, b], determinată de punctele :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

cu $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, i = 1, 2, …, n, iar ca puncte intermediare alegem
$\zeta_i = x_{i-1}$ sau $\zeta_i^* = x_i$, i = 1, 2, …, n. Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sigma_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

sau
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sigma_n^* = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Dacă funcţia f este derivabilă, cu derivata mărginită pe [a, b], atunci

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sigma_n\right|\le A\cdot\frac{(b-a)^2}{n}$$

unde A = sup {| f ‘(x) |; x ∈ [a, b]}.

Observaţia 6.1.5.8. Dacă funcţia f este crescătoare pe [a, b], atunci σ_n aproximează integrala prin lipsă, iar σ_n^* prin adaos, de aceea media lor aritmetică constituie o aproximare mai bună.

Teorema 6.1.5.7. *(Metoda trapezelor)*

În condiţiile teoremei precedente, avem:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{\sigma_n+\sigma_n^*}{2}=\frac{b-a}{2n}[f(a)+2f(x_1)+...+2f(x_{n-1})+f(b)]$$

Dacă funcţia f are derivata de ordinul doi mărginită pe [a,b], atunci

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{\sigma_n+\sigma_n^*}{2}\right|\le B\cdot\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

unde B = sup {| f’’(x) |; x ∈ [a, b]}.

Teorema 6.1.5.8. *(Metoda tangentelor)*

În condiţiile teoremei 6.1.5.6., luând n=2m, avem:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{m}\sum_{i=1}^m f(x_{2i-1})$$

Teorema 6.1.5.9. *(Metoda lui Simpson)*

În condiţiile teoremei 6.1.5.6., luând n = 2m, t_n valoarea aproximativă a integralei obţinută prin metoda trapezelor, T_n cea obţinută prin metoda tangentelor avem :

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{2t_n+T_n}{3}=\frac{b-a}{6m}[f(a)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+$$

$$...+2f(x_{2m-2})+4f(x_{2m-1})+f(b)]$$

Dacă f are derivată de ordinul patru mărginită pe [a, b], atunci

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{2t_n+T_n}{3}\right|\le M\cdot\frac{(b-a)^5}{2880m^4},$$

unde M = sup {| $f^{(4)}(x)$ |; x ∈ [a, b]}.

Observaţia 6.1.5.9. O altă metodă de aproximare a integralei simple este metoda de integrare prin dezvoltarea în serie de puteri. Această metodă, furnizată de teorema de integrare termen cu termen a unei serii de puteri constă în dezvoltarea funcţiei f în serie de puteri, integrarea termen cu termen a acestei serii, obţinerea integralei $\int_a^b f(x)dx$ ca sumă a unei serii numerice şi aproximarea acesteia cu o sumă parţială convenabilă .

6.1.6. Aplicaţii ale integralei simple

Fie f : [a, b] → R o funcţie continuă pe [a, b]. Atunci *aria domeniului* $D\subset R^2$, mărginit de graficul funcţiei f, axa ox şi dreptele de ecuaţii x = a şi x = b, este dată de

$$a(D) = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (6.1.6.1)$$

Volumul corpului $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox este dat de :

$$v(\Omega) = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (6.1.6.2)$$

Dacă funcţia f are derivate continuă pe [a, b], atunci *lungimea arcului de curbă* $(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$, care are ecuaţia y = f(x), $x \in [a, b]$ este dată de :

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)dx} \qquad (6.1.6.3)$$

6.1.7 Integrala simplă cu parametru.

Definiţia 6.1.7.1. Fie $A \subset \mathbb{R}$, J = [a, b] $\subset \mathbb{R}$ şi $f : A \times J \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că pentru fiecare $x \in A$, funcţia $t \to f(x, t)$ este integrabilă pe

[a, b]. Funcţia $F : A \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ se numeşte *integrală cu parametru* (cu "limite fixe". Parametrul este x).

Definiţia 6.1.7.2. Fie $\varphi, \psi : A \to [a, b]$ două funcţii, astfel încât
$\varphi(x) \le \psi(x)$, pentru orice $x \in A$, iar pentru orice $x \in A$ funcţia $t \to f(x, t)$ este integrabilă pe intervalul $[\varphi(x), \psi(x)]$. Funcţia $\tilde{F} : A \to \mathbb{R}$ definită prin

$\tilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ se numeşte, de asemenea, *integrală cu parametru* (cu "limite variabile". Parametrul este x).

Teorema 6.1.7.1. Fie $A \subset \mathbb{R}$ un interval nu neapărat compact,
J = [a, b] $\subset \mathbb{R}$. Dacă funcţia $f : A \times J \to \mathbb{R}$ este continuă pe A x J, atunci funcţia $F : A \to \mathbb{R}$, F(x) = $\int_a^b f(x,t)dt$ este continuă pe A.

Teorema 6.1.7.2. Fie $A \subset \mathbb{R}$ un interval nu neapărat compact,
J = [a, b] $\subset \mathbb{R}$. Fie $\varphi, \psi : A \to [a, b]$ două funcţii continue pe A şi
$f : A \times J \to \mathbb{R}$ continuă pe A x J. Atunci funcţia $\tilde{F} : A \to \mathbb{R}$
$\tilde{F}(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este continuă pe A.

Teorema 6.1.7.3. Fie $A \subset \mathbb{R}$, A interval arbitrar, J = [a, b] $\subset \mathbb{R}$ şi funcţia
$f : A \times J \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe A x J, are derivată parţială în raport cu x, continuă pe A x J, atunci funcţia $F: A \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ este derivabilă pe A şi, pentru orice $x \in A$, avem:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

În plus, funcţia F' este continuă pe A.

Teorema 6.1.7.4. Fie A$\subset$R, A interval arbitrar, J = [a, b] $\subset$R.
Fie φ, ψ : A → J două funcţii arbitrare de clasă C^1 pe A, f : A x J → R o funcţie continuă pe A x J. Atunci funcţia $\widetilde{F}$: A → R

$\widetilde{F}$ (x) = $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este derivabilă pe A şi pentru orice x$\in$A, avem:

$$\widetilde{F}\,'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt + f(x,\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

Teorema 6.1.7.5. Fie A$\subset$R, A interval arbitrar, J = [a, b] $\subset$R. Fie
f : A x J → R o funcţie continuă pe A x J. Atunci funcţia ,

F(x) = $\int_a^b f(x,t)dt$ este integrabilă pe orice interval compact [α, β] $\subset$ A şi are loc egalitatea

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\right]dt$$

Observaţia 6.1.7.1. Egalitatea din concluzia teoremei precedente se poate scrie:

$$\int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,t)dt\right]dx = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\right]dt$$

Această formulă arată că, în condiţiile teoremei, putem schimba ordinea de integrare.

Observaţia 6.1.7.2. Pentru integralele cu parametru cu limite variabile nu putem da în mod direct o asemenea formulă. Putem însă, prin schimbarea de variabilă:

$$t = \varphi(x) + z\,[\psi(x) - \varphi(x)],$$

să reducem integrala cu limite variabile la o integrală cu limite fixe, şi apoi să schimbăm ordinea de integrare. Prin urmare, dacă φ, ψ : A → [a, b] sunt continue pe A, iar f : A x J → R este continuă pe A x J, atunci funcţia

$\widetilde{F}$: A → R $\widetilde{F}$ (x) = $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt$ este integrabilă pe orice interval compact [α, β] $\subset$ A şi avem:

$$\int_\alpha^\beta \widetilde{F}(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)dt\right]dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_0^1 g(x,z)dz\right]dx = \int_0^1 \left[\int_\alpha^\beta g(x,z)dx\right]dz$$

unde g este funcţia g : A x [0, 1] → R definită prin:

$$g(x, z) = f(x, \varphi(x) + z[\psi(x) - \varphi(x)]) \cdot [\psi(x) - \varphi(x)],$$

care este evident continuă pe A x [0, 1] , ceea ce justifică ultima egalitate.

6. INTEGRALA SIMPLĂ.
INTEGRALA SIMPLĂ CU PARAMETRU

6.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 6.2.1. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ b) $\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$ d) $\int_1^e \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

e) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ f) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}dx$

g) $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ h) $\int_2^3 \frac{\mathrm{dx}}{(1+\mathrm{x})\sqrt{\mathrm{x}^2-1}}$

Soluţii. a) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx =$

$= 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_0^1 \mathrm{x}\left(\sqrt{4-\mathrm{x}^2}\right)'\mathrm{dx} =$

$= 4\arcsin \left.\frac{x}{2}\right|_0^1 + + \left.x\sqrt{4-x^2}\right|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx =$

$= 4\,\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx.$

Deci $2\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$, adică $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Aplicăm de două ori formula de integrare prin părţi:

$\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx = - \int_0^{1/2} (\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})'\cos \pi\mathrm{x}\mathrm{dx} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} \bullet \left.\cos \pi x\right|_0^{1/2} + + \int_0^{1/2} e^{-x}(-\sin \pi x)\cdot \pi dx = 1-$

$\pi\int_0^{1/2} e^{-x}\sin \pi x dx = 1 + \pi\int_0^{1/2} (\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})'\sin \pi\mathrm{x}\mathrm{dx} = 1 + \left.\pi e^{-x}\sin \pi x\right|_0^{1/2} - \pi\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x\cdot \pi dx =$

$= 1 + \pi e^{-1/2} - \pi^2\int_0^{1/2} e^{-x}\cdot \cos \pi x dx$

Rezultă că $(1+\pi^2)\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx = 1 + \pi e^{-1/2}$ şi deci

$$\int_0^{1/2} e^{-x}\cos \pi x dx = \frac{1+\pi e^{-1/2}}{1+\pi^2} = \frac{\sqrt{e}+\pi}{\sqrt{e}(1+\pi^2)}.$$

c) Avem $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\sin^2 \mathrm{x})'}{1+\sin^2 \mathrm{x}} \mathrm{dx}$

şi folosind prima formulă a schimbării de variabilă, obţinem:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx = \ln\left(1+\sin^2 \mathrm{x}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \ln 2.$$

d) Se observă că $\frac{\mathrm{x}}{(1+\mathrm{x}^2)^2} = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{x}^2}\right)'$ şi folosind formula de integrale prin părţi, obţinem:

$$\mathrm{I} = \int_1^e \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)' \cdot \ln x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln x\Big|_1^e + \int_0^e \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\cdot\int_0^e \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

Pentru calculul acestei din urmă integrale folosim descompunerea în fracţii simple, şi anume:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

Un calcul simplu ne arată că A = 1, B = -1 şi C = 0.

Deci $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2}$ şi deci integrala cerută devine:

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_1^e \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^e \frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2)\Big|_1^e =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(1+e^2) + \frac{1}{4}\ln 2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^2} + \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{e}{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{4}\ln 2.$$

e) Se foloseşte a doua formulă a schimbării de variabilă. Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{e^x-1}$ = t, adică x = ln (1 + t^2). Integrala devine:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx = \int_0^2 \frac{(1+t^2)\cdot t}{1+t^2+3}\cdot\frac{2t}{1+t^2} dt = \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2+4} dt =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt = \int_0^2 \left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt =$$

$$= 2\left(t\Big|_0^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot arctg\frac{t}{2}\Big|_0^2\right) = 2\left(2-2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(2-\frac{\pi}{2}\right) = 4-\pi$$

f) Se foloseşte schimbarea de variabilă $tg\,\frac{x}{2}$ = t, de unde x = 2arctg t şi integrala cerută devine:

$$\int_0^1 \frac{2}{6t^2+4t+4}dt = \int_0^1 \frac{1}{3t^2+2t+2}dt = \int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2-\frac{1}{3}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{5}{3}}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot arctg\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\left(\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(s-a ţinut seama de sin x = $\dfrac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}$ şi cos x = $\dfrac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}$)

g) Folosim schimbarea de variabilă x = 2sin t

Avem : $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt =$

$$= \int_0^{\pi/2} 2^4\cdot\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt = 4\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt = 4\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = 2\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin 4t}{4}\Bigg|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$

h) Efectuăm schimbarea de variabilă $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ = t, deci x = $\frac{1+t^2}{1-t^2}$. Integrala devine:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-t^2)^2}{4t}\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exerciţiul 6.2.2. Să se determine aria domeniului $D\subset\mathbb{R}^2$ mărginit de graficul funcţiei f(x) = e^{-x}sin x, x $\in\mathbb{R}$, axa Ox şi dreptele x = 0 şi x = 2π.

Soluţie. Ţinând seama de 6.1.6.1. avem :

a(D) = $\int_0^{2\pi} e^{-x}|\sin x|dx = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx$.

Integrând prin părţi, obţinem

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = -\int_0^{\pi} e^{-x}(\cos x)' dx = -e^{-x}\cdot\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(e^{-x})'\cos x dx = e^{-\pi}+1 - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x dx = e^{-\pi}+1 - \int_0^{\pi} e^{-x}(\sin x)' dx =$$

$$= e^{-\pi}+1 - e^{-x}\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = e^{-\pi}+1 - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx .$$

Rezultă: $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)$.

Analog,

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx = -\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}(\cos x)' dx = e^{-x}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}(e^{-x})'\cos x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\cos x dx = -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}(\sin x)' x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - e^{-x}\sin x\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}(e^{-x})'\sin x dx =$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx .$$

Rezultă: $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}\left(e^{-2\pi}+e^{-\pi}\right)$.

Prin urmare, a(D) = $\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-2\pi}+e^{-\pi}\right) = e^{-\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}$.

Exerciţiul 6.2.3. Să se determine volumul corpului $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei f : [0, π] → ℝ, f(x) = cos x.

Soluţie. Ţinând seama de 8.1.6.2. , deducem:

$$v(\Omega) = \pi\int_0^{\pi}\cos^2 x dx = \pi\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

Exerciţiul 6.2.4. Să se determine lungimea graficului funcţiei
f : [0, 1] → ℝ, f(x) = arcsin e^{-x}.

Soluţie. Ţinând seama de 6.1.6.3. , obţinem:

$$l(\gamma) = \int_0^1\sqrt{1+f'^2(x)}dx = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx =$$

$$= \int_1^e\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln(t+\sqrt{t^2-1})\Big|_1^e = \ln(e+\sqrt{e^2-1}) .$$

Exerciţiul 6.2.5. Să se arate că funţia F: (1, ∞) → ℝ

F(x) = $\int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t)dt$ este continuă pe (1, ∞) .

Soluţie. Funcţia f : (1, ∞) x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to$ R , f(x, t) = ln (x^2 – $\sin^2 t$) este continuă pe (1, ∞) x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fiind compunere de funcţii continue (evident, pentru orice (x, t) $\in$ (1, ∞) x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avem x^2– $\sin^2 t$ >0).

Exerciţiul 6.2.6. Fie F: (-1, 1) $\to$ R , definită prin:

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x\cos t)dt$$

Să se arate că funcţia F este derivabilă pe (-1, 1) şi să se determine derivata ei.

Soluţie. Funcţia f : (-1, 1) x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to$ R ,

$$f(x, t)= \frac{1}{\cos t} \cdot \ln(1 + x\cos t)$$

este continuă pe (-1, 1) x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, fiind compunere de funcţii continue.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{1 + x\cos t} \cdot \cos t = \frac{1}{1 + x\cos t}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ este evident continuă pe (-1, 1) x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deci F este derivabilă pe (-1, 1), iar F'(x) = $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + x\cos t}dt$.

Făcând schimbarea de variabilă $tg\frac{t}{2}$ = u, obţinem:

$$F'(x) = 2\int_0^1 \frac{1}{u^2(1-x) + (1+x)}du = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot arctgu\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\Bigg|_{u=0}^{u=1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} .$$

Exerciţiul 6.2.7. Folosind posibilitatea de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze integrala:

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln\frac{1 + x\cos t}{1 - x\cos t}dt \text{ , unde } x \in (-1, 1).$$

Soluţie. Integrala cerută nu poate fi calculată prin metode elementare. Sunt satisfăcute însă condiţiile teoremei 6.1.7.3. pentru funcţia

f : (-1, 1) x $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, f(x, t) = $\frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1+x\cos t}{1-x\cos t}$. Aşadar funcţia

F : (-1, 1) →R , F(x) = $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cdot \ln \frac{1+x\cos t}{1-x\cos t} dt$ este derivabilă pe

(-1, 1) şi F'(x) = 2 $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+x\cos t)(1-x\cos t)} dt$, pentru orice x ∈ (-1,1).

Integrala obţinută se mai poate scrie:

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+x\cos t} dt + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-x\cos t} dt$$

şi folosind substituţia $tg \frac{t}{2}$ = u, se obţine:

$$F'(x) = 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x)+(1-x)u^2} du + 2\int_0^1 \frac{1}{(1-x)+(1+x)u^2} du ,$$

adică F'(x) = $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left[arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right]$ şi folosind egalitatea trigonometrică *arctg α* +

arctg $\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$, obţinem

F'(x) = $\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}$, pentru orice x ∈ (-1, 1), de unde deducem că

F(x) = π arcsin x + C, unde C trebuie determinat.

Făcând pe x = 0, obţinem F(0) = C şi, cum din relaţia de definiţie F(0) = 0, rezultă C = 0. Prin urmare, F(x) = π arcsin x , pentru orice x ∈ (-1, 1) .

Exerciţiul 6.2.8. Folosind posibilitatea inversării ordinii de integrare în integralele depinzând de un parametru, să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$, unde

f : [0, 1] → R este funcţia definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}, x \neq 0, x \neq 1, \text{unde } 0 < \alpha < \beta \\ 0, \qquad x = 0 \\ \beta - \alpha, \qquad x = 1 \end{cases}$$

Soluţie. Observăm că $\frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} = \int_\alpha^\beta x^t dt$, deci $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[\int_\alpha^\beta x^t dt \right] dx$

Cum teorema 8.1.7.5. este aplicabilă, schimbând ordinea de integrare, obţinem:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_0^1 x^t dx \right] dt = \int_\alpha^\beta \frac{1}{t+1} dt = \ln \frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

7. INTEGRALA IMPROPRIE.

7.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale.

Definiţia 7.1.1. Fie funcţia f : I → R unde I este un interval arbitrar cu extremităţile α , β ∈ $\overline{R}$. Funcţia f se numeşte *impropriu integrabilă pe I* dacă este integrabilă pe orice interval compact inclus în I şi, pentru orice $c \in$ I, există şi sunt finite limitele: $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ a > \alpha}} \int_a^c f(x)dx$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ b < \beta}} \int_c^b f(x)dx$. Suma acestor limite se numeşte *integrala improprie* a funcţiei f pe intervalul I şi notăm:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\substack{x \to \alpha \\ a > \alpha}} \int_a^c f(x)dx + \lim_{\substack{x \to \beta \\ b < \beta}} \int_c^b f(x)dx$$

Dacă funcţia f este impropriu integrabilă pe I, se mai spune că integrala improprie $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ este *convergentă* . În caz contrar, ea este *divergentă.*

Observaţia 7.1.1. a) Definiţia convergenţei, precum şi valoarea integralei improprii sunt independente de alegerea punctului $c \in$ I .
b) Deoarece integrala simplă este funcţie continuă de extremităţile sale de integrare, rezultă că dacă I = [α, β] este un interval compact, integrala improprie a funcţiei f pe intervalul I coincide cu integrala simplă a acestei funcţii pe acest interval. Din acelaşi motiv, integrala funcţiei f pe intervalul [α, β] coincide cu integrala funcţiei f pe fiecare din intervalele: (α, β], [α, β), (α, β). Analog dacă β = ∞, integrala pe [α,∞) coincide cu integrala pe (α,∞). Este suficient deci să cunoaştem integralele improprii pe intervale deschise.
c) O integrală improprie poate fi redusă la o integrală improprie doar la unul din capete, scriind :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx$$

De aceea este suficient să ne ocupăm de integrala improprie la unul din capete. Ca şi la integrala simplă, acceptăm şi la integrala improprie că :

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx = - \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Prezentăm în continuare, câteva *proprietăţi ale integralelor improprii* , care se transpun fără dificultate de la integralele simple.

Teorema 7.1.1. *(Proprietatea de liniaritate)*

Dacă funcţiile f_1, f_2 : [α, β) →R sunt impropriu integrabile pe
[α, β) atunci, pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in$ R funcţia $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este impropriu integrabilă pe [α, β) şi

$$\int_\alpha^\beta (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)dx = \lambda_1 \int_\alpha^\beta f_1(x)dx + \lambda_2 \int_\alpha^\beta f_2(x)dx$$

Teorema 7.1.2. *(Formula Leibnitz-Newton pentru integrala improprie)*

Dacă funcţia f : [α, β) →R este integrabilă pe orice interval compact inclus în [α, β) şi admite o primitivă F pe [α, β), atunci f este impropriu integrabilă pe [α, β), dacă şi numai dacă F are limită finită în β. În acest caz:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\substack{x \to \beta \\ x < \beta}} F(x) - F(\alpha)$$

Teorema 7.1.3. *(Formula de integrare prin părţi)*

Dacă f, g : [α, β) →R sunt funcţii derivabile cu derivate continue pe [α, β), încât f • g are limită în β şi $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$ este convergentă, atunci şi integrala $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ este convergentă şi are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = \lim_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} f(x)g(x) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx$$

(evident că rolul celor două integrale improprii care apar poate fi schimbat)

Teorema 7.1.4. *(Formula schimbării de variabilă)*

Fie f : [α, β) →R , φ : [α', β') →[α, β) încât φ(α') = α, $\lim_{\substack{x\to\beta' \\ x<\beta'}}$ φ(x)=β

Dacă φ este derivabilă, cu derivata continuă pe [α', β') , f este continuă pe [α, β) şi $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ este

convergentă, atunci şi integrala $\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx$

este convergentă şi are loc egalitatea:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

Observaţia 7.1.2. Dacă cunoaştem o primitivă a funcţiei f : [α, β) →R , putem stabili natura (convergenţa sau divergenţa) integralei improprii $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. După cum se ştie, nu întotdeauna este posibil să determinăm o primitivă. De aceea este util să cunoaştem criterii de convergenţă, criterii cu ajutorul cărora să putem stabili natura unei integrale improprii, fără a pretinde să-i găsim valoarea exactă.

Teorema 7.1.5. *(Criteriul lui Cauchy)*

Fie f : [α, β) →R o funcţie integrabilă pe orice interval compact inclus în [α, β). Atunci $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice ε > 0 există δ > 0, încât pentru orice b', b'' ∈ (β – δ, β) să avem :

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

7. INTEGRALA IMPROPRIE.

7.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 7.2.1. Să se studieze natura următoarelor integrale improprii şi să se determine valorile acestora, în caz de convergenţă:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$

c) $\int_{3/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ d) $\int_{0}^{\infty} \cos x dx$

e) $\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin xbxdx$, a > 0, b$\in$R e) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Soluţii. a) Funcţia f : (-1, 1) $\rightarrow$R , f(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ este integrabilă pe orice interval compact [a, b] $\subset$(-1, 1), fiind continuă. Deoarece F(x) = arcsin x este o primitivă pentru f, rezultă că

$\int_{a}^{b} f(x)dx$ = arcsin b – arcsin a.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{b\to 1\\ b<1}}$ arcsin b = $\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{\substack{a\to -1\\ a>-1}}$ arcsin a = - $\frac{\pi}{2}$, rezultă că

$\int_{-1}^{1} f(x)dx$ este convergentă şi valoarea sa este $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ = $\frac{\pi}{2}$ + $\frac{\pi}{2}$ = π.

b) Funcţia f : (0, 1) $\rightarrow$R , f(x) = $\frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$ este integrabilă pe orice interval compact inclus în (0, 1), fiind continuă. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}$ f(x) = 1, funcţia poate fi prelungită prin continuitate în x = 0, prin urmare integrala este neesenţial improprie la acest capăt. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}$ f(x) = ∞, integrala este improprie în limita superioară. Deoarece F(x) = (arcsin $\sqrt{x}$)^2 este o primitivă a funcţiei f. deducem imediat că integrala este convergentă şi $\int_{0}^{1} f(x)dx$ = $\frac{\pi^2}{4}$.

Cu schimbarea de variabilă arcsin$\sqrt{x}$ = t se poate deduce imediat $\int_{0}^{1} f(x)dx$ = $\int_{0}^{\pi/2} 2tdt = t^2\Big|_{0}^{\pi/2}$ = $\frac{\pi^2}{4}$.

c) Cu formula Leubnitz-Newton obţinem imediat:

$$\int_{3/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \cos \frac{1}{x}\Big|_{3/\pi}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \cos \frac{1}{x} - \cos \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

d) $\int_0^{\infty} \cos x dx$ este divergentă, deoarece primitiva F(x) = sin x nu are limită la ∞.

e) Funcţia f: [0, ∞)→R , f(x) = e^{-ax}•sin bx este continuă pe [0, ∞), deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în [0, ∞). Integrând de două ori prin părţi, se obţine primitiva F(x) = $-\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}$•$e^{-ax}$, x$\in$(0, ∞). Cum a > 0, rezultă că $\lim_{x\to\infty} e^{-ax} = 0$ şi cum

$$\left| -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2} \right| \le \frac{a+|b|}{a^2+b^2}$$

pentru orice x$\in$[0, ∞), deducem că $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Rezultă că integrala dată este convergentă. Deoarece F(0) = $-\frac{b}{a^2+b^2}$, rezultă

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

f) Funcţia f: [0, ∞)→R , f(x) = $\frac{1}{1+x^4}$ este continuă pe [0, ∞) deci este integrabilă pe orice interval compact inclus în [0, ∞). Utilizând descompunerea în fracţii simple:

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}x + x^2} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1-\sqrt{2}x + x^2}, \ x\in[0, \infty)$$

se obţine primitiva F(x) =

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[arctg\left(\sqrt{2}x+1\right) + arctg\left(\sqrt{2}x-1\right)\right] + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Deoarece $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ şi F(0) = 0, rezultă că integrala este convergentă şi valoarea sa este $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Exerciţiul 7.2.2. Fie f : (0, ∞) x (0, ∞) →(0, ∞) funcţia definită prin

f(x, t) = $t^{x-1}e^{-t}$. Să se demonstreze că integrala $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ converge simplu (punctual) pe (0, ∞).

Soluţie. Pentru orice (x, t) $\in$(0, ∞) x (0, 1] avem 0 < f(x, t) $\le t^{x-1}$.

Cum $\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$, rezultă că, pentru fiecare x$\in$(0, ∞), funcţia t→f(x, t) este impropriu integrabilă pe (0, ∞), deci integrala $\int_0^{\infty} f(x,t)dt$ este punctual convergentă pe (0, ∞).

Observaţia 7.2.1. Se poate defini funcţia Γ : (0, ∞)→ (0, ∞) prin

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, cunoscută sub numele de *funcţia "gama" a lui Euler*.

Exerciţiul 7.2.3. Fie f : (0, ∞) x (0, ∞) x (0, 1) →(0, ∞) funcţia definitiă prin f(x, y, t) = $t^{x-1}(1 - t)^{y-1}$. Să se demonstreze că integrala $\int_0^1 f(x,y,t)dt$ converge simplu (punctual) pe (0, ∞) x (0, ∞) .

Soluţie. Fie g : (0, ∞) x (0, ∞) x (0, 1) →(0, ∞) funcţia definită prin g(x, y, t) = $t^{x-1} + (1 - t)^{y-1}$. Fie (x, y) $\in$ (0, ∞) x (0, ∞) fixat. Dacă

$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$, atunci $(1 - t)^{y-1} \le 2$, deci $t^{x-1}(1 - t)^{y-1} \le 2t^{x-1} \le 2g(x, y, t)$, iar dacă t $\in \left(\frac{1}{2},1\right)$, atunci $0< t^{x-1} = t^x \frac{1}{t} \le 2$ deci $t^{x-1}(1 - t)^{y-1} \le 2(1-t)^{y-1} \le 2g(x, y, t)$. Deci, pentru orice (x, y) $\in$ (0, ∞) x (0, ∞) şi orice t$\in$(0, 1),
f(x, y, t) $\le$ 2g(x, y, t).

Cum $\int_0^1 g(x,y,t)dt = \int_0^1 t^{x-1}dt + \int_0^1 (1-t)^{y-1}dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, rezultă că funcţia t → f(x, y, t) este impropriu integrabilă pe (0, 1), deci integrala $\int_0^1 f(x,y,t)dt$ este punctual convergentă pe (0, ∞) x (0, ∞).

Observaţia 7.2.2. Din exerciţiul 9.3.6. rezultă că se poate defini integrala improprie cu doi parametrii, B : (0, ∞) x (0, ∞) →(0, ∞) prin

$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ cunoscută sub numele de *funcţia "beta" a lui Euler*.

Exerciţiul 7.2.4. Să se demonstreze că integrala $\int_0^\infty \frac{xdt}{1+t^2x^2}$, x$\in\mathbb{R}$ converge punctual, dar nu converge uniform pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Fie x$\in\mathbb{R}$ fixat şi b < ∞. Evident,

$$\int_0^b \frac{\mathrm{xdt}}{1+\mathrm{t}^2\mathrm{x}^2} = \mathrm{arctg}(\mathrm{tx})\Big|_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{t=b}} = \mathrm{arctg\,bx}\,.$$

Deoarece $\lim_{b\to\infty}\int_0^\infty \frac{xdt}{1+t^2x^2} = \lim_{b\to\infty}$ arctg bx = $\begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ daca } x>0 \\ 0, \text{ daca } x=0 \\ -\frac{\pi}{2}, \text{daca } x<0 \end{cases}$ rezultă că integrala dată converge punctual pe $\mathbb{R}$. Putem defini F :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin:

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{xdt}{1+t^2x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ daca } x > 0 \\ 0, \text{ daca } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ daca } x < 0 \end{cases}$$

Să observăm că funcţia F este discontinuă în x = 0. Funcţia

f : R x (0, ∞) →R , f(x, t) = $\frac{x}{1+t^2x^2}$ este, evident,continuă pe Rx(0,∞)

Dacă integrala ar fi uniform convergentă pe R , aplicând teorema 7.1.15., ar rezulta că F este continuă pe R , ceea ce este fals. Rezultă că integrala dată nu este uniform convergentă pe R .

Exeerciţiul 7.2.5. Să se demonstreze că funcţia Γ : (0, ∞) →(0, ∞) definită prin Γ(x) = $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ este derivabilă pe (0, ∞) şi

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt\ .$$

Soluţie. Din exerciţiul 7.3.5. deducem că funcţia Γ este bine definită. Notând f(x, t) = $t^{x-1}e^{-t}$, (x, t) ∈(0, ∞) x (0, ∞) rezultă că:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^{x-1}e^{-t}\ln t,\ (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

şi că $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe (0, ∞) x (0, ∞), fiind produs de funcţii continue.

Fie acum a,b ∈(0, ∞) arbitrare, fixate. Demonstrăm că integrala $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ este uniform convergentă pe (a, b]. Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm convergenţa uniformă a integralelor $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ şi $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ pe (a, b]. Dacă x > 1 prima integrală este o integrală simplă. Dacă a < x ≤ 1, scriem:

$$t^{x-1}e^{-t}\ln t = \frac{t^{x-a}e^{-t}\ln t}{t^\lambda}, \text{ unde } \lambda = 1 - a < 1$$

Deoarece , pentru orice x ∈(a, 1] şi t∈(0, 1] avem:

$$| t^{x-1}e^{-t}\ln t\ | = - \frac{t^{x-a}e^{-t}\ln t}{t^\lambda} < \frac{1}{t^\lambda}$$

şi $\int_0^1 \frac{dt}{t^\lambda}$ este convergentă (deoarece λ < 1) deducem că $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ este uniform convergentă. Pentru convergenţa celei de a doua integrale, se observă că:

$$t^{x-1}e^{-t}\ln t = \frac{t^{x+1}e^{-t}\ln t}{t^2} \le M \cdot \frac{1}{t^2},$$

x∈(a, b), t∈[1, ∞), unde M > 0 este convenabil ales ($t^{x+1}e^{-t}\ln t < t^{b+1}e^{+t}\ln t$ iar $\lim_{t\to\infty} t^{b+1}e^{-t}\ln t = 0$).

Cum $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$ este convergentă, rezultă că integrala $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt$ este uniform convergentă pe (a, b).

Prin urmare, integrala $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ este uniform convergentă pe (a, b). Aplicând teorema 7.1.16., deducem că funcţia Γ este derivabilă cu derivata continuă pe (a, b). dar a,b fiind oarecare, deducem că Γ este derivabilă cu derivata continuă pe (0, ∞) şi avem :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt\ ,\ x\in(0,\ \infty).$$

Exerciţiul 7.2.6. Folosind funcţiile "beta" şi "gama" , să se calculeze:

a) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx,\ p,q,m>0$

b) $\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx,\ p>-1, q>0$.

Soluţie. a) Cu schimbarea de variabilă $x^m = t$, rezultă:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx = \int_0^1 t^{\frac{p-1}{m}}(1-t)^{q-1}\cdot\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{1}{m}B(\frac{p}{m},q).$$

b) Cu schimbarea de variabilă $x^q = t$, obţinem :

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx = \int_0^\infty t^{\frac{p}{q}}\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{q}\cdot t^{\frac{1}{q}-1}dt = \frac{1}{q}\int_0^\infty t^{\frac{p+1}{q}}\cdot e^{-t}dt = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

Exercițiul 7.3.13. Utilizând teorema 7.1.17., să se calculeze

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt .$$

Soluție. Deoarece $\lim_{t \to 0} \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} = 0$, integrala este improprie doar în limita superioară. Deoarece $\lim_{t\to\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} = 0$ rezultă că $\left| \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} \right| \le M \cdot e^{-t}$, cu M > 0 convenabil ales, iar $\int_0^\infty e^{-t} dt$ este convergentă, rezultă că integrala dată este absolut convergentă, deci şi convergentă. Pentru calcul, observăm mai întâi că:

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty \left. \frac{\cos xt}{t} \right|_{x=b}^{x=a} \cdot e^{-t} dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_b^a -\sin xt dx \right] \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty \left[\int_a^b e^{-t} \sin xt dx \right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt \right] dx .$$

Ultima egalitate a fost obţinută în exerciţiul precedent, utilizând teorema 7.1.17. Pentru x ∈ [a, b] fixat, calculăm:

$$\int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt = -\int_0^\infty (e^{-t})' \sin xt dt = -e^{-t} \sin xt \Big|_{t=0}^\infty + \int_0^\infty e^{-t} (\cos xt) x dt$$

$$= -x \int_0^\infty (e^{-t})' \cos xt dt = -x \left[e^{-t} \cos xt \Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty e^{-t} (-\sin xt) x dt \right] =$$

$$= -x \left[-1 + x \int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt \right] = x - x^2 \int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt .$$

Prin urmare, $\int_0^\infty e^{-t} \sin xt dt = \frac{x}{1+x^2}$, x ∈ [a, b]. Deci,

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} \cdot e^{-t} dt = \int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_a^b = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}$$

Exercițiul 7.3.14. Fie f:[1, ∞) x [1, ∞) →R funcţia definită prin :

$$f(x, t) = \frac{x-t}{(x+t)^3} .$$

Demonstraţi că : $\int_1^\infty \left[\int_1^\infty f(x,t) dt \right] dx \ne \int_1^\infty \left[\int_1^\infty f(x,t) dx \right] dt$.

Soluţie. Deoarece $|f(x,t)| \le \frac{1}{t^2}$, pentru orice $(x,t) \in [1, \infty) x [1, \infty)$, integrala $\int_1^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă în raport cu parametrul
$x \in [1, \infty)$.
Prin calcul direct, obţinem:

$$\int_1^{\infty} f(x,t)dt = -\int_1^{\infty} \frac{t-x}{(t+x)^3} dt = -\int_1^{\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} + 2x\int_1^{\infty} \frac{dt}{(t+x)^3} =$$

$$= \frac{1}{t+x}\Big|_{t=1}^{\infty} - x \cdot \frac{1}{(t+x)^2}\Big|_{t=1}^{\infty} = -\frac{1}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$x \in [1, \infty)$.

Prin urmare,

$$\int_1^{\infty}\left[\int_1^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=1}^{\infty} = -\frac{1}{2}.$$

Deoarece $|f(x,t)| \le \frac{1}{x^2}$ pentru orice $(x,t) \in [1, \infty) x [1, \infty)$, integrala $\int_1^{\infty} f(x,t)dt$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t \in [1, \infty)$. Prin calcul direct, obţinem:

$$\int_1^{\infty} f(x,t)dt = \int_1^{\infty} \frac{x-t}{(x+t)^3} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+t)^2} - 2t\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+t)^3} =$$

$$= -\frac{1}{x+t}\Big|_{x=1}^{\infty} + t \cdot \frac{1}{(x+t)^2}\Big|_{x=1}^{\infty} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2},$$

$t \in [1, \infty)$,

de unde $\int_1^{\infty}\left[\int_1^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \int_1^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}$.

Să observăm că funcţia f nu păstrează un semn constant pe
$[1, \infty) x [1, \infty)$, deci teorema 7.1.18. nu este aplicabilă, chiar dacă toate celelalte ipoteze sunt satisfăcute.

Exerciţiul 7.3.15. Utilizând teorema 7.1.17.,să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

Soluţie. Deoarece $\lim_{x \to 0} \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}} = 1$, integrala este improprie doar în limita superioară.

Deoarece $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, aplicând teorema 7.1.9.., pentru λ = $\frac{1}{2}$ şi l = $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, deducem că integrala este convergentă.

Pentru calcul, observăm mai întâi că:

$$\frac{arctgx}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{x^2t^2+1},\ x \in (0, \infty).$$

Prin urmare $\int_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{x^2t^2+1} \right) dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dt}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}} \right] dx$

Deoarece $\frac{1}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pentru orice (x, t) $\in$ [0,1)x[0,1) şi $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$, rezultă că $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ este uniform convergentă în raport cu parametrul t. Prin urmare, se poate schimba ordinea de integrare şi obţinem :

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dt}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dx}{(x^2t^2+1)\sqrt{1-x^2}} \right] dt = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+t^2\sin^2 u} \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^\infty \frac{dv}{1+(1+t^2)v^2} \right] dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot arctg\left(v \cdot \sqrt{1+t^2} \Big|_0^\infty \right) \right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Exerciţiul 7.3.16. Fie f:[0, ∞) x [0, ∞) $\to \mathbb{R}^+$, f(x, t) = $xe^{-x^2(1+t^2)}$.

a) Demonstraţi că $\int_a^\infty \left[\int_0^\infty f(x,t)dt \right] dx = \int_0^\infty \left[\int_a^\infty f(x,t)dx \right] dt$, pentru orice a > 0

b) Deduceţi că $\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x,t)dt \right] dx = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(x,t)dx \right] dt$

c) Demonstraţi că: $\int_a^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integrala lui Euler-Poisson)

Soluţie. a) Utilizând teorema 7.1.18. , deoarece f este pozitivă şi satisface condiţiile:

- f este, evident, continuă pe [0, ∞) x [0, ∞) ;
- $\int_0^\infty f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe orice interval compact [α, β] $\subset$ [a, b], deoarece f(x, t) $\le$ β$e^{-\alpha^2(1+t^2)}$, x $\in$ [α, β], t $\in$ [0, ∞) iar $\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}dt$ este convergentă
- $\int_a^\infty f(x,t)dt$ este uniform convergentă pe [0, ∞) deoarece f(x, t) $\le$ xe^{-x^2}, pentru orice x $\in$ [a, ∞), t $\in$ [0, ∞), iar integrala $\int_a^\infty xe^{-x^2}$ este convergentă;

- $\int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt$, a > 0, este convergentă deoarece:

$$\int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2(1+t^2)} \cdot e^{-a^2(1+t^2)}dt,$$

$$\frac{1}{2(1+t^2)} \cdot e^{-a^2(1+t^2)} < \frac{1}{2(1+t^2)}, \ t \in [0, \infty) \text{ şi}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2(1+t^2)}dt = \frac{1}{2} arctgt\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Rezultă: $\int_a^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt$ pentru orice a > 0.

b) Deoarece g(a, t) = $\int_a^{\infty} f(x,t)dx = \frac{1}{2(1+t^2)} \cdot e^{-a^2(1+t^2)}$, $a \in [0, \infty)$, $t \in [0, \infty)$ este continuă, iar integrala $\int_0^{\infty} g(a,t)dt$ este uniform convergentă pe $[0, \infty)$, fiind majorată de integrala improprie convergentă $\int_0^{\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)}$, rezultă că $\lim_{a\to 0}\int_0^{\infty}\left[\int_a^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \lim_{a\to 0}\int_0^{\infty} g(a,t)dt = \int_0^{\infty} g(0,t)dt =$ $\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx\right]dt$.

Trecând acum la limită când a → 0 în egalitatea stabilită la a) rezultă:

$$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx\right]dt.$$

c) Evaluăm pe rând integralele care apar în egalitatea stabilită la punctul b):

$$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dt\right]dx = \int_0^{\infty}\left[xe^{-x^2}\int_0^{\infty} e^{-x^2t^2}dt\right]dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(\int_0^{\infty} e^{-u^2}du\right)dx = \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2}du\right)\cdot\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right).$$

$$\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x,t)dx\right]dt = \int_0^{\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} arctgt\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Prin urmare $\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$, de unde rezultă imediat egalitatea cerută.

Exerciţiul 7.3.17. Folosind funcţiile "beta" şi "gama" , să se calculeze:

a) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx, p,q,m > 0$

b) $\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0$.

Soluţie. a) Cu schimbarea de variabilă $x^m = t$, rezultă:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}dx = \int_0^1 t^{\frac{p-1}{m}}(1-t)^{q-1}\cdot\frac{1}{m}t^{\frac{1}{m}-1}dt =$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{1}{m}B(\frac{p}{m},q).$$

b) Cu schimbarea de variabilă $x^q = t$, obţinem :

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q}dx = \int_0^{\infty} t^{\frac{p}{q}}\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{q}\cdot t^{\frac{1}{q}-1}dt = \frac{1}{q}\int_0^{\infty} t^{\frac{p+1}{q}}\cdot e^{-t}dt = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

8.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

8.1.1. Drumuri şi curbe în $\mathbb{R}^p$

Definiţia 8.1.1.1. Se numeşte *drum* în $\mathbb{R}^p$ orice funcţie continuă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Dacă $f_1, f_2, \dots, f_p\ [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt componentele lui γ, atunci egalităţile

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \quad . \\ \quad . \\ x_p = f_p(t) \end{cases}, \ t \in [a, b]$$ se numesc *ecuaţiile parametrice* ale drumului γ.

Imaginea drumului γ se notează (γ) şi este :

$$(\gamma) = \{(f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)),\ t \in [a, b]\}.$$

Ea este o submulţime a lui $\mathbb{R}^p$

Punctele $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc *capetele drumului* γ.

Drumul $\gamma^*: [a, b] \to \mathbb{R}^p$ definit prin $\gamma^*(t) = \gamma(a + b - t)$ se numeşte *opului lui* γ.

Observaţia 8.1.1.1. Evident $\gamma(a) = \gamma^*(b)$, $\gamma(b) = \gamma^*(a)$ şi $(\gamma) = (\gamma^*)$

Definiţia 8.1.1.2. Dacă $\gamma_1 :[a, b] \to \mathbb{R}^p$, $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^p$ sunt două drumuri şi $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, atunci drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{R}^p$ definit prin:

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), t \in [b,c] \end{cases}$$

se numeşte *juxtapunerea drumurilor* γ_1 şi γ_2.

Observaţia 8.1.1.2. Imaginea drumului $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea imaginilor drumului γ_1 şi γ_2.

Definiţia 8.1.1.3. Un drum $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ se numeşte *neted* dacă funcţia γ este de clasă C^1 pe $[a, b]$ şi $\gamma'(t) \neq O_{\mathbb{R}^p}$ pentru orice $t \in [a, b]$. Drumul γ se numeşte *neted pe porţiuni* dacă este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

Definiţia 8.1.1.4. Două drumuri netede $\gamma_1 :[a, b] \to \mathbb{R}^p$, $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^p$ se numesc *echivalente, cu aceeaşi orientare*, dacă există $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ astfel încât:

1. h este de clasă C^1 pe [a, b]
2. h este bijectivă;
3. h este strict crescătoare ;
4. $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$ pentru orice $t \in [a, b]$.

Observaţia 8.1.1.3. a) Orice două drumuri echivalente au aceeaşi imagine, dar reciproca afirmaţiei nu este adevărată, adică există drumuri având aceeaşi imagine şi care nu sunt echivalente (de exemplu $\gamma_1 :[0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t, t)$ şi $\gamma_2 :[-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (t^2, t^2)$).

b) Faptul că h este strict crescătoare corespunde intuitiv faptului că imaginile lor sunt parcurse în acelaşi sens, ceea ce explică folosirea cuvintelor "cu aceeaşi orientare" în definiţia precedentă. Dacă h este strict descrescătoare, atunci γ_1 este echivalent cu γ_2^*.

c) Relaţia binară obţinută pe mulţimea drumurilor netede prin definiţia 8.1.1.4. este o relaţie de echivalenţă.

Definiţia 8.1.1.5. Se numeşte *curbă* în $\mathbb{R}^p$ o clasă de drumuri echivalente din $\mathbb{R}^p$. *Imaginea* curbei este imaginea oricărui drum conţinut în curbă.

Observaţia 8.1.1.4. Deseori se foloseşte noţiunea de curbă în sensul de imagine a sa, care este o submulţime din $\mathbb{R}^p$, ceea ce explică următoarele afirmaţii privind:

a) *Curbe în* $\mathbb{R}^2$.

- Dacă $\gamma :[a, b] \to \mathbb{R}^2$ este un drum neted în $\mathbb{R}^2$, cu componentele f, g :[a, b] $\to \mathbb{R}$, se spune că egalităţile $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), t \in [a,b] \end{cases}$ sunt *ecuaţiile parametrice ale curbei* din care face parte drumul γ
- Dacă $\gamma :[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ este dat de $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$, atunci se spune că $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$ este *ecuaţia explicită* a curbei din care face parte drumul γ.
- Dacă $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^2$ şi ecuaţia F(x, y) = 0 defineşte (local) implicit pe y ca funcţie de x, se spune că F(x, y) = 0 este *ecuaţia implicită* a unei curbe în $\mathbb{R}^2$.

b) *Curbe în* $\mathbb{R}^3$.

- Dacă $\gamma :[a, b] \to \mathbb{R}^3$ este un drum neted în $\mathbb{R}^3$, cu componentele f, g, h:[a, b] $\to \mathbb{R}$, se spune că egalităţile $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), t \in [a,b] \end{cases}$ sunt *ecuaţiile parametrice ale curbei* din care face parte drumul γ.
- Dacă $\gamma :[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ este dat de $\gamma(t) = (t, \varphi(t), \psi(t))$, atunci se spune că $\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x), x \in [a,b] \end{cases}$ sunt *ecuaţiile explicite* ale curbei din care face parte drumul γ.
- Dacă $F, G : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii de clasă C^1 pe mulţimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^3$ şi sistemul F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) =0 defineşte (local) implicit pe y şi z ca funcţii de x, se spune că $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ sunt *ecuaţiile implicite* ale unei curbe în $\mathbb{R}^3$.

8.1.2. Drumuri rectificabile. Lungimea unui drum.

Fie $\gamma :[a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ un drum în $\mathbb{R}^3$ şi Δ o diviziune a intervalului [a, b] determinată de $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Punctele $M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i))$, $i = \overline{0,n}$ determină o linie poligonală ale cărei vârfuri aparţin imaginii lui γ.

Lungimea acestei linii poligonale este:

$$l_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2 + [h(t_i) - h(t_{i-1})]^2}$$

şi creşte dacă diviziunea Δ este înlocuită cu o diviziune mai fină.

Definiţia 8.1.2.1. Drumul γ se numeşte *rectificabil* dacă mulţimea
$\{l_\Delta, \Delta$ este o diviziune a lui $[a, b]\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulţimi se numeşte lungimea drumului γ şi se notează l_γ .

Teorema 8.1.2.1. Dacă $\gamma :[a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ un drum neted, atunci γ este rectificabil şi

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

Pentru calculul lungimii unui drum neted se pot folosi şi următoarele formule:

- Dacă γ este dat de ecuaţiile explicite $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, $x \in [a, b]$, atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2 + [\psi'(x)]^2}\,dx$
- Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ este un drum neted, atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$
- Dacă γ este un drum neted dat prin ecuaţia explicită $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, atunci: $l_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

Teorema 8.1.2.2. Un drum echivalent cu un drum rectificabil γ este rectificabil şi are aceeaşi lungime cu γ.

Observaţia 8.1.2.1. Din teorema anterioară rezultă că toate drumurile ce aparţin unei curbe netede au aceeaşi lungime, care va fi numită *lungimea curbei*.

8.1.3. Integrala curbilinie de primul tip

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum neted şi $F : (\gamma) \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară. Pentru o diviziune d a intervalului [a, b] determinată de
$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ se notează cu l_i lungimea arcului de extremităţi $\gamma(t_{i-1})$ şi $\gamma(t_i)$, iar $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ este un sistem de puncte intermediare.

Funcţiei F, diviziunii d şi sistemului θ de puncte intermediare
i se asociază suma:

$$\sigma(F, d, \theta) = \sum_{i=1}^{n} F(\gamma(\theta_i)) \cdot l_i$$

Definiţia 8.1.3.1. Funcţia F se numeşte *integrabilă în raport cu arcul* pe drumul γ dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel ca, pentru orice diviziune d a lui [a, b] cu $\| d \| < \delta$ şi orice sistem de puncte intermediare θ să avem:

$$| \sigma(F, d, \theta) - I | < \varepsilon.$$

Numărul real I se numeşte *integrala curbilinie în raport cu arcul* sau *integrala curbilinie de primul tip* a funcţiei F pe drumul γ şi se notează:

$$I = \int_\gamma F(x, y, z)\,dl$$

Observaţia 8.1.3.1. a) Dacă $F(x, y, z) = 1$, pentru orice $(x, y, z) \in (\gamma)$, rezultă imediat că numărul I este tocmai l_γ a arcului (γ). Deci $l_\gamma = \int_\gamma dl$.

b) Se poate demonstra că dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri echivalente şi F este integrabilă în raport cu arcul pe γ_1, atunci ea este integrabilă şi pe γ_2 şi cele două integrale coincid. De aici rezultă că, dacă F este integrabilă în raport cu arcul pe un drum γ, atunci ea este integrabilă pe orice drum din curba din care face parte γ şi valoarea integralei este aceeaşi. Aceasta justifică denumirea de integrală curbilinie (sau integrală pe curba din care face parte γ).

Teorema 8.1.3.1. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum neted de ecuaţii $x = f(t)$,

y = g(t), z = h(t), t $\in$ [a, b] şi F o funcţie continuă pe un domeniu ce conţine imaginea lui γ. Atunci F este integrabilă în raport cu arcul pe drumul γ şi

$$\int_\gamma F(x,y,z)dl = \int_a^b F(f(t),g(t),h(t))\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2+[h'(t)]^2}\,dt$$

Observaţia 8.1.3.2. Dacă γ :[a, b] → $\mathbb{R}^2$ este un drum neted de ecuaţii x = f(t), y = g(t), t $\in$ [a, b] şi F : (γ) → $\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci F este integrabilă în raport cu arcul pe γ şi

$$\int_\gamma F(x,y)dl = \int_a^b F(f(t),g(t))\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

Teorema 8.1.3.2. *(Proprietăţi ale integralei curbilinii de primul tip)*

Fie γ :[a, b] → $\mathbb{R}^3$ un drum neted, F, G : (γ) → $\mathbb{R}$ continue.

Atunci:

$$\int_\gamma (\alpha F(x,y,z)+\beta G(x,y,z))dl = \alpha\int_\gamma F(x,y,z)dl + \beta\int_\gamma G(x,y,z)dl$$ (liniaritate)

- Dacă F(γ(t)) ≥ 0 pentru orice t $\in$ [a, b], atunci
  $$\int_\gamma F(x,y,z)dl \ge 0$$ (monotonie)
- $$\left|\int_\gamma F(x,y,z)dl\right| \le \int_\gamma |F(x,y,z)|dl$$ (estimarea modulului integralei)
- Există $t^* \in$ [a, b] astfel încât $\int_\gamma \mathrm{F(x,y,z)dl} = \mathrm{F}(\gamma(t^*))\cdot l_\gamma$, unde l_γ este lungimea drumului γ (formula de medie)
- $$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} F(x,y,z)dl = \int_{\gamma_1} F(x,y,z)dl + \int_{\gamma_2} F(x,y,z)dl$$ (aditivitate faţă de drum)
- $$\int_\gamma F(x,y,z)dl = \int_{\gamma^*} F(x,y,z)dl$$ (independenţa de orientare)

8.1.4. Aplicaţii ale integralei curbillinii de primul tip

8.1.4.1. Lungimea unei curbe

Curba reprezentată de drumul neted γ de ecuaţii x = f(t), y = g(t), z = h(t), t $\in$ [a, b] are lungimea $l_\gamma = \int_\gamma dl$.

8.1.4.2. Masa unui fir material

Dacă imaginea (γ) a drumului neted γ modelează un fir material, iar ρ : (γ) → $\mathbb{R}$ este o funcţie continuă care asociază fiecărui punct (x, y, z) $\in$ (γ) densitatea ρ(x, y, z) a firului în acel punct, atunci masa firului este m = $\int_\gamma \rho(x,y,z)dl$

8.1.4.3. Centrul de greutate al unui fir material

Coordonatele centrului de greutate al firului (γ) a cărui densitate în punctul (x, y, z) este ρ(x, y, z) sunt date de egalităţile:

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\rho(x,y,z)dl}{\int_\gamma \rho(x,y,z)dl}\ ;\ y_G = \frac{\int_\gamma y\rho(x,y,z)dl}{\int_\gamma \rho(x,y,z)dl}\ ;\ z_G = \frac{\int_\gamma z\rho(x,y,z)dl}{\int_\gamma \rho(x,y,z)dl}$$

8.1.4.4. Momentele de inerţie ale unui fir material

Momentele de inerţie ale firului material (γ), având densitatea ρ(x, y, z) în punctul (x, y, z), în raport cu axele Ox, Oy, Oz sunt:

$$I_x = \int_\gamma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dl\ ;$$

$$I_y = \int_\gamma (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dl\ ;$$

$$I_z = \int_\gamma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dl$$

8.1.4.5. Atracţia exercitată asupra unui punct material de către un fir material

Punctul material $M(x_0, y_0, z_0)$ având masa m_0, este atras de firul material (γ), cu densitatea ρ(x, y, z) în punctul (x, y, z), cu o forţă ale cărei componente sunt:

$$F_x = km_0\int_\gamma \frac{(x-x_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}dl\ ;$$

$$F_y = km_0\int_\gamma \frac{(y-y_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}dl\ ;$$

$$F_z = km_0\int_\gamma \frac{(z-z_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}dl\ .$$

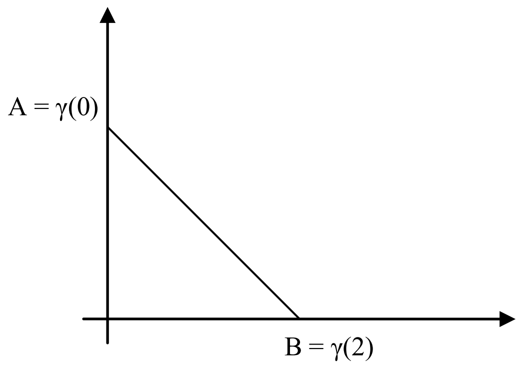
Aici k este o constantă ce depinde de alegerea unităţilor de măsură.

8. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

8.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 8.2.1. Să se calculeze $\int_{\gamma} xydl$, unde γ este dată de x = t, y = 2 – t, t $\in$ [0, 2]

Soluţie.

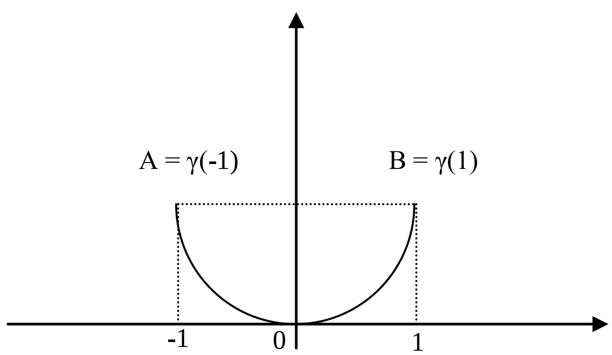


$$\int_{\gamma} \mathrm{xy\,dl} = \int_{0}^{2} \mathrm{t(2-t)}\sqrt{1^{2}+(-1)^{2}}\,\mathrm{dt} = \sqrt{2}\int_{0}^{2}(2^{\mathrm{t}}-\mathrm{t}^{2})\mathrm{dt} =$$

$$=\sqrt{2}\left(t^{2}-\frac{t^{3}}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2}=\sqrt{2}\left(4-\frac{8}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Exerciţiul 8.2.2. Să se calculeze $\int_{\gamma} xydl$ unde γ este dată de y = x^2, x $\in$ [-1,1].

Soluţie.



Ecuaţiile parametrice ale lui γ sunt $\begin{cases} x = t \\ y = t^{2}, t \in [-1,1] \end{cases}$.

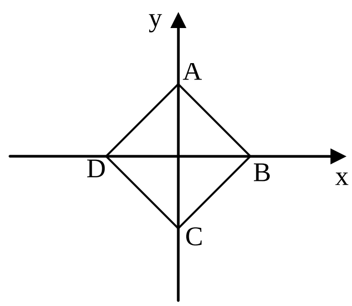
Deci $\int_\gamma xydl = \int_{-1}^{1} t^3\sqrt{1^2+(2t)^2}\,dt = 0$ (deoarece se integrează o funcţie impară pe un interval simetric fată de 0)

Exerciţiul 8.2.3. Să se calculeze $\int_\gamma xydl$ unde γ : |x| + |y| = a, a>0

Soluţie. Imaginea drumului γ este prezentată în figura următoare. Se observă că ea este reuniunea imaginii a patru drumuri:

AB: $\begin{cases} x = t \\ y = a - t, t \in [0, a] \end{cases}$ CB: $\begin{cases} x = t \\ y = t - a, t \in [0, a] \end{cases}$

DC: $\begin{cases} x = t \\ y = -t - a, t \in [-a, 0] \end{cases}$ DA: $\begin{cases} x = t \\ y = a + t, t \in [-a, 0] \end{cases}$



Rezultă $\int_\gamma xydl = \int_{AB} xydl + \int_{BC} xydl + \int_{CD} xydl + \int_{DA} xydl =$

$= \int_0^a t(a-t)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt + \int_0^a t(a-t)\sqrt{1^2+1^2}\,dt$ -

- $\int_{-a}^{0} t(-t-a)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt + \int_{-a}^{c} t(a+t)\sqrt{1^2+1^2}\,dt =$

$= \sqrt{2}\left[\int_0^a t(a-t)dt + \int_0^a t(a-t)dt + \int_{-a}^{0} t(a+t)dt + \int_{-a}^{0} t(a+t)dt\right] = 0$

Exerciţiul 8.2.4. Să se calculeze $\int_\gamma (x+y)dl$ unde γ este bucla lemniscatei $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ aflată în cadranele I şi IV.

Soluţie. Înlocuim x şi y în ecuaţia implicită prin x = rcosθ, y = rsinθ . Rezultă $r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2r^2 \cos 2\theta$, adică $r^2 = a^2\cos 2\theta$. Din condiţia cos2θ ≥ 0 rezultă $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (ţinând cont şi de faptul că interesează bucla din cadranele I şi IV)

Rezultă şi r = a $\sqrt{\cos 2\theta}$, deci ecuaţiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos\theta \\ y = a\sqrt{\sin 2\theta} \cdot \sin\theta, \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

Atunci $\int\limits_{\gamma} (x+y)dl = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos\theta + a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \sin\theta) \cdot$

$\cdot \sqrt{\left[\left(a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \cos\theta\right)'\right]^2 + \left[\left(a\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \sin\theta\right)'\right]^2}\, d\theta =$

$$= a^2 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} + \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}) \cdot \sqrt{\left[\sqrt{\cos 2\theta}\right]^2 + \left[\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right]^2}\, d\theta =$$

$$= a^2 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} + \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}) \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos 2\theta}}\, d\theta =$$

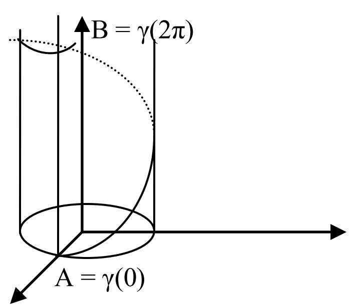
$$= a^2 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin\theta + \cos\theta)d\theta = a^2 (\sin\theta - \cos\theta)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2\sqrt{2}.$$

Exercițiul 8.2.5. Să se calculeze I = $\int\limits_{\gamma} (x+y+z)dl$, unde γ este dată de x = cos t, y = sin t, z = t, t∈ [0, 2π].

Soluție.

$$\int\limits_{\gamma} (x+y+z)dl = \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos t + \sin t + t) \cdot \sqrt{[(\cos t)']^2 + \left[(\sin t)'\right]^2 + [t']^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} (\cos t + \sin t + t)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\left(\sin t - \cos t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 2\pi^2\sqrt{2}$$



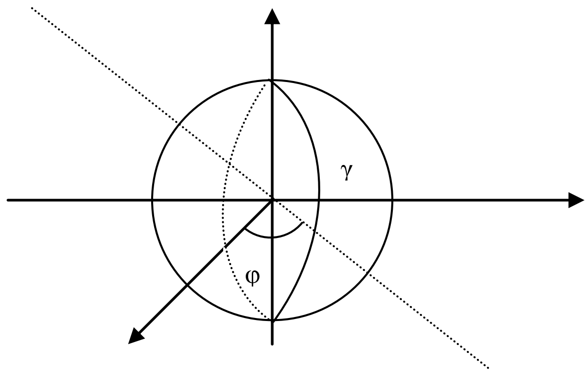
Imaginea curbei γ este reprezentată în figură.

Exercițiul 8.2.6. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z^2}\, dl$, unde γ este circumferința cercului de ecuație

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}.$$

Soluţie. Cercul γ este intersecţia sferei de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu planul de ecuaţie x = y.

$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt obţinute cu ajutorul ecuaţiilor parametrice ale sferei: $\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\theta, \varphi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\pi] \end{cases}$ ţinând cont că din condiţia x = y rezultă $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ sau $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$.

Rezultă γ : $\begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ y = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ z = a\cos\theta, \theta \in [0,\pi] \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ y = -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta \\ z = a\cos\theta, \theta \in [0,\pi] \end{cases}$.

Deci x = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ sin θ, y = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ sin θ, z = acos θ, θ ∈ [0, 2π].

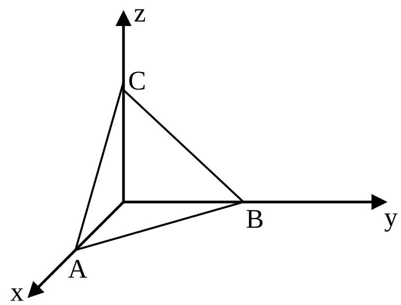
Rezultă $\int\limits_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z^2}\,dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)^2 + (a\cos\theta)^2} \cdot$

$$\cdot \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2 + (-a\sin\theta)^2}\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2}\, d\theta = a^2 \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a^2$$

Exerciţiul 8.2.7. Să se calculeze $\int\limits_{\gamma} (x + y + z)\,dl$ unde γ este triunghiul cu vârfurile în A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1).

Soluţie. Se observă că γ este reuniunea a trei drumuri:



AB: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0, t \in [0,1] \end{cases}$ BC: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = t, t \in [0,1] \end{cases}$

CA: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t, t \in [0,1] \end{cases}$

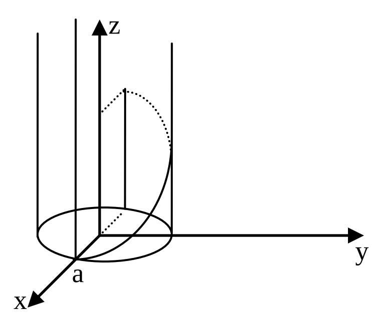
Rezultă $\int_{\gamma} (x + y + z)dl = \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\,dt +$

$+ \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}\,dt + \int_0^1 (t + 1 - t)\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}\,dt$

$= 3\int_0^1 \sqrt{2}dt = 3\sqrt{2}$.

Exerciţiul 8.2.8. Să se calculeze lungimea curbei γ definită prin reprezentarea parametrică: x = a cost, y = a sint, y = bt, t∈[0, 2π],a > 0,b> 0

Soluţie. Curba este o elice circulară a cărei imagine este prezentată în figura alăturată.



Lungimea sa este:

$$l_\gamma = \int_0^\pi \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

Exercițiul 8.2.9. Să se determine masa și coordonatele centrului de greutate al firului material care este imaginea curbei γ : x = $4t^5$; y = $\sqrt{15}\,t^4$; z = $2t^3$, t ∈ [-1, 1] dacă densitatea în punctul (x, y, z) este ρ(x, y, z) = $\frac{1}{2}|z|$.

Soluție.

$$m = \int_\gamma \frac{1}{2}|z|\,dl = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}|2t^3|\sqrt{(20t^4)^2+(4\sqrt{15}t^3)^2+(6t^2)^2}\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\cdot 2|t^3|\,t^2(20t^2+6)dt = 2\int_0^1 t^5(20t^2+6)dt = \left(\frac{40t^8}{8}+\frac{12t^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 5 + 2 = 7$$

Coordonatele centrului de greutate sunt :

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\cdot\frac{1}{2}\cdot|z|\,dl}{7} = \frac{\int_{-1}^{1}4t^5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|t^3|\cdot t^2(20t^2+6)dt}{7} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_\gamma y\cdot\frac{1}{2}\cdot|z|\,dl}{7} = \frac{\int_{-1}^{1}\sqrt{15}t^4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|t^3|\cdot t^2(20t^2+6)dt}{7} = \frac{68\sqrt{15}}{105}$$

$$z_G = \frac{\int_\gamma z\cdot\frac{1}{2}\cdot|z|\,dl}{7} = \frac{\int_{-1}^{1}2t^3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|t^3|\cdot t^2(20t^2+6)dt}{7} = 0$$

Exercițiul 8.2.10. Să se determine momentul de inerție în raport cu axa Oz a primei spirale a elicei x = a cost, y = a sint, z = bt, având densitatea constantă ρ.

Soluție. $I_z = \int_\gamma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dl = \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)\cdot$

$$\cdot\rho\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = 2\pi a^2\cdot\rho\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Exercițiul 8.2.11. Să se determine atracția exercitată de arcul de astroidă
x = a $\cos^3$t, y = a $\sin^3$t situat în primul cadran, asupra unității de măsură situată în originea coordonatelor, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu cubul distanței de la punct la originea coordonatelor.

Soluție.

$$F_x = k\cdot 1\cdot\int_\gamma \frac{x\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}dl =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} a\cos^3 t\sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos^4 t\,dt = -k3a\frac{\cos^5 t}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3ak}{5}.$$

9. INTEGRALE MULTIPLE

9.1. Noţiuni teoretice fundamentale

9.1.1. Definiţia şi proprietăţile integralei duble

Definirea integralelor duble şi a funcţiilor integrabile de două variabile, se face prin generalizarea rezultatelor din 6. Intervalul compact
$[a, b] \subset \mathbb{R}$ este înlocuit cu un domeniu compact măsurabil Jordan din $\mathbb{R}^2$, deoarece acesta are proprietăţile de bază ale intervalelor compacte din $\mathbb{R}$.

Reamintim că o mulţime deschisă şi conexă se numeşte *domeniu*. Aderenţa unui domeniu se numeşte *domeniu închis*. Un domeniu închis şi mărginit din $\mathbb{R}^2$ se numeşte *domeniu compact*. Un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este imaginea unei curbe netede pe porţiuni, este *măsurabil Jordan (are arie).*

În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

Definiţia 9.1.1.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil. Se numeşte *diviziune* a domeniului D, o familie finită $d = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ de mulţimi cu următoarele proprietăţi:

a) fiecare mulţime D_i este domeniu compact măsurabil;

b) $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ = D;

c) dacă $i \neq j$; atunci $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$. ($\overset{\circ}{D}_i$ reprezintă interiorul muţimii D_i)

Se numeşte *norma diviziunii* d, numărul:

$$\|d\| = \max \{d(D_i);\ i=1, 2, \ldots, n\}$$

unde $d(D_i)$ este diametrul mulţimii D_i.

Notăm cu $\mathscr{D}$ mulţimea tuturor diviziunilor domeniului D.

Definiţia 9.1.1.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi
$f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită, fie $d = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o diviziune a domeniului D. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fie $m_i = \inf f(D_i)$ şi
$M_i = \sup f(D_i)$. Suma $s_f(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot a(D_i)$ se numeşte *suma inferioară Darboux* asociată funcţiei f şi diviziunii d, iar suma $S_f(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot a(D_i)$ se numeşte *suma superioară Darboux* (cu $a(D_i)$ s-a notat aria domeniului D_i). Se numeşte *integrala inferioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul D, numărul:

$$\underline{I} = \sup \{s_f(d);\ d \in \mathscr{D}\}$$

iar numărul :

$$\bar{I} = \inf \{S_f(d);\ d \in \mathscr{D}\}$$

se numeşte *integrala superioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul D. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul D în sensul lui Darboux*, dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară. Valoarea lor comună se numeşte *integrala dublă a funcţiei f pe domeniul compact D în sensul lui Darboux.*

Definiţia 9.1.1.3. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară; fie $d = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o diviziune a domeniului D. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, fie $\xi_i \in D_i$, arbitrar; mulţimea de puncte
$\xi = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \}$ se numeşte *sistem de puncte intermediare* . Suma

$$\sigma_f(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot a(D_i)$$

se numeşte *suma Riemann* a funcţiei f corespunzătoare diviziunii d şi sistemului ξ de puncte intermediare. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul compact D în sensul lui Riemann*, dacă există $I \in \mathbb{R}$ încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathscr{D}$ cu $\|d\| < \eta$ şi pentru orice sistem ξ de puncte intermediare, să avem $|\sigma_f(d, \xi) - I| < \varepsilon$. Numărul real I, a cărui unicitate se dovedeşte imediat, se numeşte *integrala funcţiei f în sensul lui Riemann, pe domeniul compact D.*

Observaţia 9.1.1.1. În definiţia 9.1.1.3. nu este necesar să presupunem funcţia f mărginită. Dacă însă presupunem că domeniul D are diviziuni de normă oricât de mică, se poate demonstra că *orice funcţie integrabilă Riemann* pe un asemenea domeniu *este mărginită*. De aceea, în continuare, vom considera numai funcţii mărginite.

Teorema 9.1.1.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este integrabilă în sens Darboux pe D;
b) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $d \in \mathscr{D}$ încât $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
c) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathscr{D}$ cu $\|d\| < \eta$, avem $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
d) f este integrabilă în sens Riemann pe D.

În acest caz $I = \underline{I} = \overline{I}$; de aceea, în cele ce urmează , ne vom referi la funcţii integrabile pe domeniul compact D şi la integrale duble, fără a mai preciza sensul şi vom nota:

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy .$$

Cea mai importantă consecinţă a teoremei precedente este integrabilitatea funcţiilor continue.

Teorema 9.1.1.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Dacă mulţimea $D_1 \subset D$ a punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este de măsură Jordan nulă (de arie nulă) atunci f este integrabilă pe D.

La fel ca şi în cazul integralei simple, se demonstrează următoarele proprietăţi:

Teorema 9.1.1.3. *(Proprietatea de liniaritate)*

Dacă f_1 şi f_2 sunt funcţii integrabile pe domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ şi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ atunci funcţia $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ este integrabilă pe D şi are loc egalitatea:

$$\iint_D (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x, y)dxdy = \lambda_1 \iint_D f_1(x, y)dxdy + \lambda_2 \iint_D f_2(x, y)dxdy$$

Teorema 9.1.1.4. *(Proprietatea de aditivitate faţă de domeniu)*

Dacă D_1, D_2 , $D_1 \cup D_2$ sunt domenii compacte măsurabile, atunci funcţia mărginită f este integrabilă pe $D_1 \cup D_2$ dacă şi numai dacă f este integrabilă pe D_1 şi pe D_2; dacă în plus, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, atunci are loc egalitatea:

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy .$$

Teorema 9.1.1.5. *(Proprietatea de monotonie)*

Dacă f_1 şi f_2 sunt funcţii integrabile de domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ şi pentru orice $(x, y) \in D$, avem $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$ atunci:

$$\iint_D f_1(x, y)dxdy \le \iint_D f_2(x, y)dxdy$$

Teorema 9.1.1.6. Dacă funcţia f este integrabilă pe D, atunci şi |f| este integrabilă pe D şi are loc inegalitatea:

$$\left| \iint_D f(x, y)dxdy \right| \le \iint_D |f(x, y)| dxdy$$

Teorema 9.1.1.7. *(Formula de medie pentru integrala dublă)*

Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul compact măsurabil D şi m = inf f(D), M = sup f(D) atunci există $\mu \in [m, M]$ încât:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \mu \cdot a(D).$$

Dacă f este continuă pe D, atunci există $(\xi, \tau) \in D$ încât

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi, \tau) \cdot a(D).$$

9.1.2. Calculul integralelor duble

Teorema 9.1.2.1. Fie D = [a, b] x [c, d] şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe D. Dacă pentru fiecare $x \in [a, b]$ există

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

atunci funcţia $F:[a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe [a, b] şi are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx,$$

care se mai scrie

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx.$$

Observaţia 9.1.2.1. Schimbând in teoremă rolul variabilelor x şi y obţinem: dacă f este integrabilă pe D şi dacă pentru fiecare $y \in [c, d]$ există

$G(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, atunci:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)dy,$$

adică,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

În particular, dacă f este *continuă* pe D, atunci f este integrabilă pe D, există atât F(x) , $x \in [a, b]$, cât şi G(y), $z \in [c, d]$, prin urmare au loc ambele egalităţi, deci *ordinea de integrare nu contează*.

Teorema 9.1.2.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact măsurabil, simplu faţă de axa Oy:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x);\ x \in [a, b]\},$$

unde $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1 (orice paralelă la axa Oy intersectează frontiera lui D în cel mult două puncte). Dacă funcţia $f:D \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe D şi pentru orice $x \in [a, b]$ funcţia $y \to f(x, y)$ este integrabilă pe intervalul $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ atunci funcţia $\tilde{F} : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\tilde{F}(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ este integrabilă pe [a, b] şi are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \tilde{F}(x)dx, \text{ adică}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx .$$

Observaţia 9.1.2.2. Dacă domeniul compact măsurabil D este simplu faţă de Ox, se stabileşte un rezultat asemănător, schimbând rolul variabilelor x şi y. Dacă D nu este în nici una din aceste situaţii, se descompune prin paralele la axele de coordonate, într-un număr finit de subdomenii compacte, fără puncte interioare comune şi care să fie în una din situaţiile de mai sus. Se aplică apoi proprietatea de aditivitate faţă de domeniu.

Teorema 9.1.2.3. *(Teorema schimbării variabilelor în integrala dublă)*

Fie D, $D^* \subset \mathbb{R}^2$ domenii compacte măsurabile şi $T:D^* \rightarrow D$ o transformare punctuală $(u, v) \xrightarrow{T} (x, y)$ cu jacobianul neutru în $\overset{\circ}{D^*}$ şi astfel încât $T(D^*) = D$. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci are loc egalitatea :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv .$$

Observaţia 9.1.2.3. Pentru aplicaţii, găsirea transformării T este esenţială; nu există o metodă generală pentru rezolvarea acestei probleme ci, de la caz la caz, se alege transformarea T în funcţie de forma ecuaţiilor care definesc frontiera domeniului D. Alegerea este bună, dacă noul domeniu D^* este mai simplu, adică dacă integrala dublă pe D^*, obţinută după aplicarea formulei, se descompune mai uşor în integrale simple.

9.1.3. Aplicaţii ale integralelor duble

9.1.3.1. Calculul ariilor

Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact, a cărui frontieră este reuniunea imaginilor unui număr finit de curbe netede, atunci *aria lui D* este:

$$a(D) = \iint_D dxdy$$

9.1.3.2. Calculul maselor şi al coordonatelor centrelor de greutate

Dacă domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ reprezintă o placă materială (de grosime neglijabilă), iar funcţia continuă $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ reprezintă densitatea plăcii, atunci *masa plăcii* este dată de:

$$masa(D) = \iint_D \rho(x,y)dxdy ,$$

iar *coordonatele centrului de greutate* al plăcii sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{masa(D)} \cdot \iint_D x\rho(x,y)dxdy , \quad y_G = \frac{1}{masa(D)} \cdot \iint_D y\rho(x,y)dxdy$$

9.1.3.3. Momente de inerţie

Momentul de inerţie al plăcii reprezentată de domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ *faţă de originea axelor de coordonate* este dat de:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy ,$$

iar *momentele de inerţie faţă de axele de coordinate* sunt:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy, \ I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy$$

9.1.4. Definiţia şi proprietăţile integralei triple

Integrala triplă se defineşte la fel ca integrala dublă, domeniul compact măsurabil $D \subset \mathbb{R}^2$ fiind înlocuit cu un domeniu compact măsurabil $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Reamintim că un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ a cărui frontieră este imaginea unei suprafeţe netede pe porţiuni este măsurabil Jordan (are volum). În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

Definiţia 9.1.4.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil. Se numeşte *diviziune* a domeniului Ω, o familie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ de mulţimi cu următoarele proprietăţi:

a) fiecare mulţime Ω_i este domeniu compact măsurabil;

b) $\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega$;

c) dacă $i \neq j$, atunci $\overset{\circ}{\Omega}_i \cap \overset{\circ}{\Omega}_j = \emptyset$ ($\overset{\circ}{\Omega}_i$ reprezintă interiorul mulţimii Ω_i).

Se numeşte *norma diviziunii* d, numărul :

$$\|d\| = \max\{d(\Omega_i);\ i = 1, 2, \dots, n\},$$

unde $d(\Omega_i)$ reprezintă diametrul mulţimii Ω_i .

Notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea tuturor diviziunilor domeniului Ω.

Definiţia 9.1.4.2. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită; fie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ o diviziune a domeniului Ω. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ fie $m_i = \inf f(\Omega_i)$ şi

$M_i = \sup f(\Omega_i)$ Suma $s_f(d) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot v(\Omega_i)$ se numeşte *suma inferioară Darboux* asociată funcţiei f şi diviziunii d, iar suma

$S_f(d) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot v(\Omega_i)$ se numeşte *suma superioară Darboux* (cu $v(\Omega_i)$ s-a notat volumul domeniului Ω_i).

Se numeşte *integrala inferioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul Ω, numărul :

$$\underline{I} = \sup\{s_f(d);\ d \in \mathcal{D}\}$$

iar numărul

$$\overline{I} = \inf\{S_f(d);\ d \in \mathcal{D}\}$$

se numeşte *integrala superioară Darboux* a funcţiei f pe domeniul Ω. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul* Ω *în sensul lui Darboux*, dacă integrala inferioară Darboux coincide cu integrala superioară. Valoarea lor comună se numeşte *integrala triplă a funcţiei f pe domeniul compact* Ω *în sensul lui Darboux.*

Definiţia 9.1.4.3. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară; fie $d = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ o diviziune a domeniului Ω. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, fie $\xi_i \in \Omega_i$ arbitrar; mulţimea de puncte

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ se numeşte *sistem de puncte intermediare*. Suma:

$$\sigma_f(d, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot v(\Omega_i)$$

se numeşte *suma Riemann* a funcţiei f corespunzătoare diviziunii d şi sistemului ξ de puncte intermediare. Funcţia f se numeşte *integrabilă pe domeniul compact* Ω *în sensul lui Riemann*, dacă există $I \in \mathbb{R}$ încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel ca, pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$ şi pentru orice sistem ξ de puncte intermediare, să avem:

$$|\sigma_f(d, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I, a cărei unicitate se dovedeşte imediat, se numeşte *integrala funcţiei f în sensul lui Riemann pe domeniul compact* Ω.

Observaţia 9.1.4.1. În definiţia 9.1.4.3. nu este necesar să presupunem funcţia f mărginită. Dacă însă presupunem că domeniul Ω are diviziuni de normă oricât de mică, se poate demonstra că orice *funcţie integrabilă Riemann* pe un asemenea domeniu *este mărginită*. De aceea, în continuare, vom considera numai funcţii mărginite.

Teorema 9.1.4.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) f este integrabilă în sens Darboux pe Ω;
b) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $d \in \mathcal{D}$ încât $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
c) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$, încât pentru orice $d \in \mathcal{D}$ cu $\|d\| < \eta$, avem $S_f(d) - s_f(d) < \varepsilon$;
d) f este integrabilă în sens Riemann pe Ω.

În caz de integrabilitate, $I = \underline{I} = \overline{I}$; de aceea, în cele ce urmează, ne vom referi la funcţii integrabile pe domeniul compact Ω şi la integralele triple, fără a mai preciza sensul şi vom nota :

$$I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz .$$

Cea mai importantă consecinţă a teoremei precedente este integrabilitatea funcţiilor continue.

Teorema 9.1.4.2. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil Jordan şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Dacă mulţimea $\Omega_1 \subset \Omega$ a punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este de măsură Jordan nulă (de volum nul), atunci f este integrabilă pe Ω.

Proprietăţile integralelor duble se reformulează pentru integralele triple. De exemplu:

Teorema 9.1.4.3. *(Formula de medie pentru integrala triplă)*

Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul compact măsurabil Ω şi $m = \inf f(\Omega)$, $M = \sup f(\Omega)$, atunci există $\mu \in [m, M]$ încât:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \mu \cdot v(\Omega).$$

Dacă f este continuă pe Ω, atunci există $(\xi, \tau, \zeta) \subset \Omega$ încât:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = f(\xi, \tau, \zeta) \cdot v(\Omega).$$

9.1.5. Calculul integralelor triple

Teorema 9.1.5.1. Fie $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ şi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe Ω. Fie $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Dacă pentru fiecare $(x, y) \in D$ există:

$$F(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz ,$$

atunci funcţia $F: D \to \mathbb{R}$ astfel definită este integrabilă pe D şi are loc egalitatea:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D} F(x,y)dxdy$$

care se mai scrie:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D}\left[\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz\right]dxdy .$$

Observaţia 9.1.5.1. Schimbând în teoremă rolul variabilelor, se pot obţine încă două formule analoage prin care calculul integralei triple pe un paralelipiped se reduce la calculul unei integrale duble şi al uneia simple.

Teorema 9.1.5..2. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact măsurabil, simplu faţă de axa Oz: $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: $\varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)$; $(x, y) \in D\}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ fiind domeniu compact măsurabil, $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă C^1 pe D (orice paralelă la axa Oz intersectează frontiera lui Ω în cel mult două puncte). Dacă funcţia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe Ω şi pentru orice
$(x, y) \in D$ funcţia $z \to f(x, y, z)$ este integrabilă pe intervalul
$[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$, atunci funcţia $\widetilde{F} : D \to \mathbb{R}$,

$\widetilde{F}(x, y) = \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$ este integrabilă pe D şi are loc egalitatea:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \iint_D \widetilde{F}(x, y)dxdy$$

adică : $$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy$$

Observaţia 9.1.5.2. Dacă domeniul compact măsurabil Ω este simplu faţă de Ox sau Oy, se stabilesc două formule asemănătoare, schimbând rolul variabilelor. Dacă Ω nu este în nici una din aceste situaţii, se descompune într-un număr finit de subdomenii compacte, fără puncte interioare comune şi care să fie în una din situaţiile de mai sus. Se aplică apoi proprietatea de aditivitate faţă de domeniu.

Teorema 9.1.5.3. *(Teorema schimbării variabilelor în integrala triplă)*

Fie $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ domenii compacte măsurabile şi $T: \Omega^* \to \Omega$ o transformare punctuală $(u, v, w) \xrightarrow{T} (x, y, z)$ cu jacobianul nenul în interiorul domeniului Ω^* şi astfel încât $T(\Omega^*) = \Omega$. Fie $f: \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci are loc egalitatea:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz = = \iiint_{\Omega^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dudvdw$$

Observaţia 9.1.5.3. Transformarea T se alege în funcţie de forma ecuaţiilor suprafeţelor care constituie frontiera domeniului Ω. Alegerea este bună dacă noul domeniu Ω^* este mai simplu, adică dacă integrala triplă pe Ω^*, obţinută după aplicarea formulei, se descompune mai uşor într-o integrală dublă şi una simplă.

9.1.6. Aplicaţii ale integralelor triple

9.1.6.1. Calculul volumelor

Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu compact a cărui frontieră este reuniunea imaginilor unui număr finit de suprafeţe netede, atunci volumul lui Ω este dat de

$$v(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz .$$

9.1.6.2. Calculul maselor şi al coordonatelor centrelor de greutate

Dacă domeniul compact măsurabil $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ reprezintă un corp material, iar funcţia continuă $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$ reprezintă densitatea corpului, atunci masa acestui corp este dată de:

$$\text{masa } (\Omega) = \iiint_\Omega \rho(x, y, z)dxdydz ,$$

iar coordonatele centrului său de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{masa(\Omega)} \iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)dxdydz\ ,$$

$$y_G = \frac{1}{masa(\Omega)} \iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)dxdydz\ ,$$

$$z_G = \frac{1}{masa(\Omega)} \iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dxdydz\ .$$

9.1.6.3. Momente de inerţie

Momentele de inerţie ale unui corp material reprezentat prin domeniul compact măsurabil $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de densitate $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$ sunt:

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oxy} = \iiint_{\Omega} z^2\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oyz} = \iiint_{\Omega} x^2\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oxz} = \iiint_{\Omega} y^2\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Ox} = \iiint_{\Omega} (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$I_{Oy} = \iiint_{\Omega} (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz \quad I_{Oz} = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

9. INTEGRALE MULTIPLE

9.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 9.2.1. Să se calculeze integralele:

a) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dydx$, unde D = {(x, y) $\in \mathbb{R}^2$| $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$}

b) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dydx$, unde D = {(x, y) $\in \mathbb{R}^2$| $1 \le x \le 2$, $\frac{1}{x} \le y \le x$}

Soluţie. a) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dydx = \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy \right] dx = = \int_0^1 \left[x^2 \cdot arctg\ y \Big|_{y=0}^{y=1} \right] dx =$

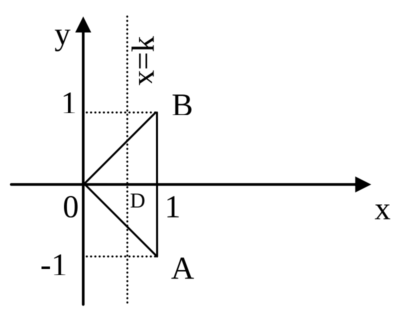
$$\int_0^1 x^2 \cdot \frac{\pi}{4} dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{12}$$

b) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dydx = \int_1^2 \left[\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right] dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \right] dx =$

$$= \int_1^2 (-x + x^3) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{9}{4}$$

Exerciţiul 9.2.2. Să se calculeze $\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}\, dxdy$, unde D este triunghiul cu vârfurile O(0, 0), A(1, -1) şi B(1, 1).

Soluţie. Domeniul D este simplu în raport cu axa Oy (vezi figura) deoarece o dreaptă x = k, k $\in$ (0, 1) intersectează pe D după un interval.



Dreptele OA şi OB au ecuaţiile:

OA: $\frac{y-0}{-1-0} = \frac{x-0}{1-0}$, adică OA: - y = x

OB: $\frac{y-0}{1-0} = \frac{x-0}{1-0}$, adică OB: y = x.

Deci: OA: y = - x

OB: y = x

Atunci domeniul D pe care se calculează integrala dublă este

D = {(x, y) $\in \mathbb{R}^2$| $0 \le x \le 1$, $-x \le y \le x$}

Putem aplica deci formula din exercițiul 11.2.2. pentru a = 0, b = 1,
$\varphi_1(x) = -x$, $\varphi_2(x) = x$.

Avem $\iint\limits_D \sqrt{x^2 - y^2}\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2}\,dy \right] dx$.

Calculăm întâi F(x) = $\int_{-x}^{x} \sqrt{x^2 - y^2}\,dy$. Observăm că funcția

g(y) = $\sqrt{x^2 - y^2}$ este pară, adică g(-y) = g(y). Atunci rezultă:

$$F(x) = 2\int_0^x \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = 2\int_0^x \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}\,dy =$$

$$= 2x^2 \arcsin \frac{y}{x}\Big|_{y=0}^{y=x} + 2\int_0^x y \cdot \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)'\,dy =$$

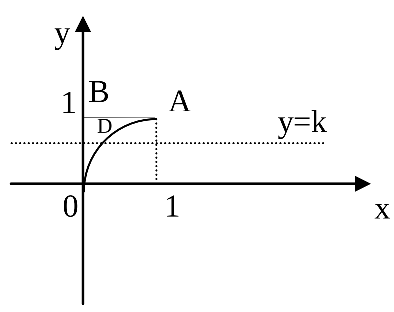
$$= 2x^2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2y\sqrt{x^2 - y^2}\Big|_{y=0}^{y=x} - 2\int_0^x \sqrt{x^2 - y^2}\,dy = \pi x^2 - F(x)$$

Deci F(x) = πx^2 – F(x), de unde F(x) = $\frac{\pi x^2}{2}$.

Așadar $\iint\limits_D \sqrt{x^2 - y^2}\,dxdy = \int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{2}\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

Exercițiul 9.2.3. Să se calculeze $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, unde D este triunghiul OAB, limitat de parabola $y^2 = x$ și dreptele x = 0, y = 1.

Soluție. Domeniul D este simplu în raport cu axa Ox (vezi figura) deoarece o dreaptă y = k, k ∈ (0, 1), intersectează pe D după un interval.



Domeniul D este caracterizat de :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y^2\}$$

Aplicăm formula din exercițiul 11.2.3. pentru c = 0, d = 1, $\psi_1(y) = 0$,
$\psi_2(y) = y^2$.

Avem deci $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx \right] dy$.

Calculăm F(y) = $\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}dx = e^{\frac{x}{y}} \cdot y \Big|_{x=0}^{x=y^2} = e^y y - y$ şi deci:

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}dxdy = \int_0^1 F(y)dy = \int_0^1 (ye^y - y)dy = \int_0^1 y(e^y)'dy - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= ye^y\Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy - \frac{1}{2} = e - e^y\Big|_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exerciţiul 9.2.4. Să se calculeze următoarele integrale duble, pe domeniile indicate:

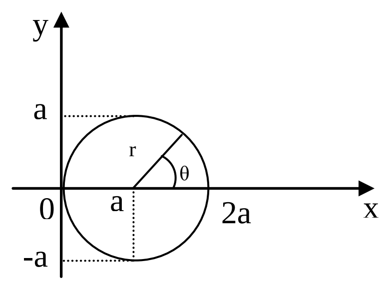
a) $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$, D fiind domeniul limitat de cercul de ecuaţie $x^2+y^2= 2ax$;

b) $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, D fiind domeniul limitat de elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

c) $\iint_D (x^2 + y^2) \cdot ydxdy$, D fiind domeniul limitat de axa Ox şi de porţiunea din cardioida r = a(a + cosθ), situată deasupra axei Ox.

Soluţii. a) Ecuaţia cercului ce limitează domeniul D se mai poate scrie: $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, deci ea defineşte cercul cu centrul în punctul de coordonate (a, 0) şi de rază a. Este convenabil să folosim coordonatele polare pentru calculul integralei duble date.

Facem aşadar schimbarea de variabile (x, y) → (r, θ), dată prin transformarea $\begin{cases} x - a = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



Noul domeniu de integrare (domeniul transformat) este:

$$D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Jacobianul acestei transformări este:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\cdot\sin\theta \\ \sin\theta & r\cdot\cos\theta \end{vmatrix} = r\cdot\cos^2\theta + r\cdot\sin^2\theta = r,$$

iar $x^2 + y^2 = a^2 + 2ar\cos\theta + r^2$.

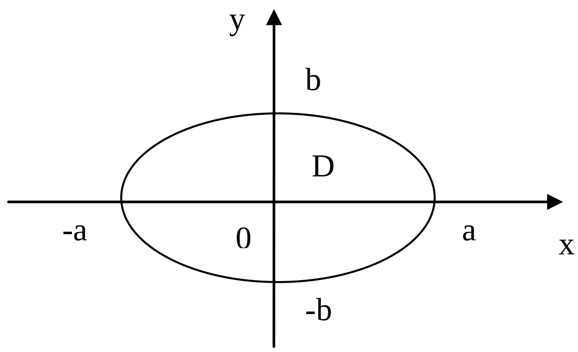
Deci integrala de calculat devine:

$$\iint_{D^*} (a^2 + 2ar\cos\theta + r^2) r dr d\theta = \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} (a^2 r + 2ar^2 \cos\theta + r^3) d\theta \right] dr =$$

$$\int_0^a \left[(a^2 r + r^3) \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} \right] dr + \int_0^a \left[2ar^2 \cdot \sin\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right] dr =$$

$$= 2\pi \int_0^a (a^2 r + r^3) dr = 2\pi \left(a^2 \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_{r=0}^{r=a} = \frac{3\pi a^4}{2} .$$

b)Trecem la coordonate polare generalizate: $\begin{cases} x = a\, r \cos\theta \\ y = b\, r \sin\theta \end{cases}$



Domeniul transformat este: $D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 \le r \le 1, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot \cos\theta & -ar \cdot \sin\theta \\ b \cdot \sin\theta & br \cdot \cos\theta \end{vmatrix} = abr ,$$

iar $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 - r^2}$.

Aşadar, integrala devine:

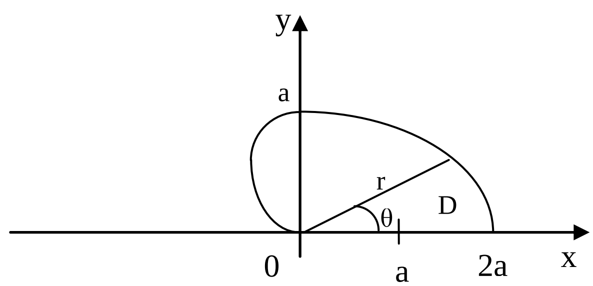
$$\iint_{D^*} abr\sqrt{1 - r^2}\, dr d\theta = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} abr\sqrt{1 - r^2}\, d\theta \right] dr =$$

$$ab \int_0^1 \left[r\sqrt{1 - r^2} \cdot \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right] dr = ab \int_0^1 2\pi r \sqrt{1 - r^2}\, dr = 2\pi ab \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, dr$$

$$= -\pi ab \int_0^1 (1 - r^2)' \sqrt{1 - r^2}\, dr = -\pi ab (1 - r^2)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Bigg|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3} .$$

c) Trecem la coordonate polare: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. Domeniul pe care se face integrarea este D (vezi figura), iar D^* este :

$$D^* = \{(r, \theta) \mid 0 \le \theta \le \pi, \ 0 \le r \le a(1 + \cos\theta)\}.$$



Avem $(x^2 + y^2)y = r^3\sin\theta$ şi J = r. Deci:

$$\iint_D (x^2+y^2)\cdot y dxdy = = \int_0^{\pi}\left[\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^4 \sin\theta dr\right]d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\sin\theta\Big|_{r=0}^{r=a(1+\cos\theta)}\right]d\theta =$$

$$= \frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}\left[(1+\cos\theta)^5\sin\theta\right]d\theta = \frac{a^5}{5}\left[\frac{-(1+\cos\theta)^6}{6}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{32a^5}{15}$$

Exerciţiul 9.2.5. Să se calculeze aria interiorului elipsei de ecuaţie:

$$(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$$

Soluţie. Folosim formula: Aria (D) = $\iint_D dxdy$, unde D este interiorul elipsei.

Efectuăm schimbarea de variabilă $(x, y) \to (u, v)$ dată prin:

$\begin{cases} x-2y=u \\ 3x+4y=v \end{cases}$, $(u, v) \in D^*$

$$D^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | (u+3)^2 + (v-1)^2 \le 100\}$$

Jacobianul acestei transformări este:

$$J^* = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \left[\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right]^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}$$

Deci: Aria(D) = $\iint_{D^*} J^* dudv = \iint_{D^*} \frac{1}{10} dudv = \frac{1}{10}\iint_{D^*} dudv$.

Pentru calculul acestei din urmă integrale trecem la coordonate polare: $\begin{cases} u+3=r\cos\theta \\ v-1=r\sin\theta \end{cases}$, unde $(r, \theta) \in D^{**}$,

$$D^{**} = \{(r, \theta) | 0 \le r \le 10, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Jacobianul transformării este în acest caz J = r, iar

$$\iint_{D^*} dudv = \iint_{D^*} J dr d\theta = \int_0^{10}\left[\int_0^{2\pi} r d\theta\right]dr = \int_0^{10}\left(r\cdot d\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right)dr =$$

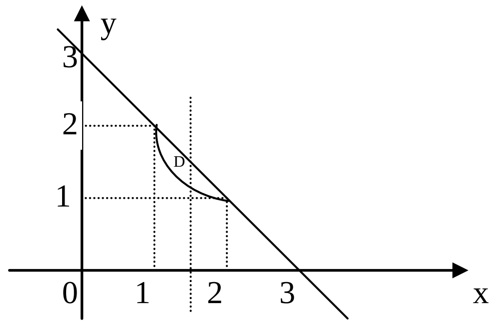
$$= \int_0^{10} r\cdot 2\pi dr = 2\pi\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_{r=0}^{r=10} = 100\pi$$

Deci: Aria(D) = $\frac{1}{10}\iint_{D^*} dudv = 10\pi$.

Exercițiul 9.2.6. Să se calculeze masa unei plăci plane D, limitate de
x + y = 3, xy = 2 şi a cărei densitate este ρ(x, y) = xy.

Soluție. M = $\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ = $\iint\limits_D xydxdy$. Domeniul D poate fi caracterizat astfel (aşa cum se vede din figură):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 \le x \le 2,\ \frac{2}{x} \le y \le 3 - x\}$$

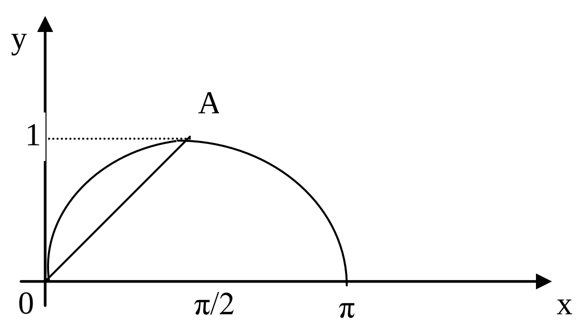


Atunci:

$$M = \int_1^2 \int_{2/x}^{3-x} xydxdy = \int_1^2 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=\frac{2}{x}}^{y=3-x} \right] dx = \int_1^2 \left[\frac{9x - 6x^2 + x^3}{2} - \frac{2}{x} \right] dx$$

$$= \left(\frac{9}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - 2\ln x \right) \Bigg|_1^2 = \frac{18}{3} - 2\ln 2 .$$

Exercițiul 9.2.7. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene din figura de mai jos, limitat de curba y = sin x şi dreapta OA care trece prin origine şi punctul A$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.



Soluție. Dreapta OA are ecuația OA: y = $\frac{2x}{\pi}$. Deci,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ \frac{2x}{\pi} \le y \le \sin x\}$$

Se calculează M = $\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ = k$\iint\limits_D dxdy$, unde ρ(x, y) = k = const fiind vorba de o placă omogenă.

Avem:

$$\iint_D dxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_{2x/\pi}^{\sin x} dy\right]dx = \int_0^{\pi/2}\left(\sin x - \frac{2x}{\pi}\right)dx = 1-\frac{\pi}{4},$$

şi deci M = k $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

Pe de altă parte,

$$\iint_D x\rho(x,y)dxdy = \text{k} \iint_D xdxdy$$

$$= \text{k} \int_0^{\pi/2}\left[\int_{2x/\pi}^{\sin x} xdy\right]dx = k\int_0^{\pi/2} x\left(\sin x - \frac{2x}{\pi}\right)dx$$

$$= \text{k} \int_0^{\pi/2} x\sin xdx - \frac{2k}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \text{- kx} \cdot \cos x\Big|_0^{\pi/2} + k\int_0^{\pi/2}\cos xdx - \frac{2k}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{24} = \text{k}\cdot \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{k\pi^2}{12}$$

$$= \text{k - } \frac{k\pi^2}{12} = k\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right).$$

Deci $x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_D x\rho(x,y)dxdy = \dfrac{k\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)}{k\left(1-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}$.

$$\iint_D y\rho(x,y)dxdy = \text{k}\iint_D ydxdy = \int_0^{\pi/2}\left[\int_{2x/\pi}^{\sin x} ydy\right]dx = k\int_0^{\pi/2}\left[\frac{y^2}{2}\Big|_{y=\frac{2x}{\pi}}^{y=\sin x}\right]dx =$$

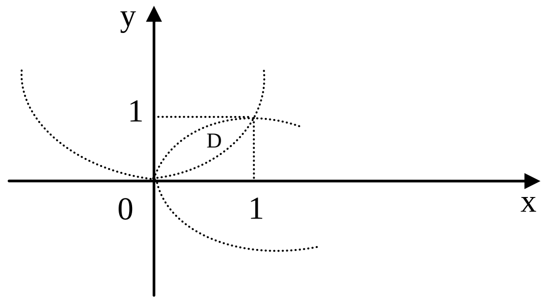
$$= \frac{k}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{k}{2}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}dx - \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{6}\right] = \frac{k}{2}\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{k\pi}{24}$$

Deci $y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iint_D y\rho(x,y)dxdy = \dfrac{\frac{k\pi}{24}}{k\left(1-\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\pi}{6(4-\pi)}$.

Exerciţiul 9.2.8. Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate pentru placa omogenă mărginită de curbele $y = x^2$, $x = y^2$.

Soluţie.



Domeniul D este caracterizat de:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\ \}$$

Deci $I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dxdy = k \iint_D y^2 dxdy = k \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy \right] dx =$

$= k \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} \Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right) dx = k \int_0^1 \left(\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = k \left(\frac{x^{5/2}}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 dx =$

$= \frac{3k}{35}$.

Analog $I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dxdy = k \iint_D x^2 dxdy = k \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 dy \right] dx =$

$= k \int_0^1 x^2 (\sqrt{x} - x^2) dx = k \int_0^1 (x^{5/2} - x^4) dx = \frac{3k}{35}$.

Exercițiul 9.2.9. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x + y + z + 1}} dxdydz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$$

b) $\iiint_\Omega xyzdxdydz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le z \le 1 - x - y,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le x \le 1\}$$

Soluţii. a) Avem:

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}}\,dxdydz = \int_0^1\left[\int_0^1\left[\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}}\,dx\right]dy\right]dz =$$

$$\int_0^1\left[\int_0^1\left[(x+y+z+1)^{1/2}\cdot 2\Big|_{x=0}^{x=1}\right]dy\right]dz =$$

$$= 2\int_0^1\left[\int_0^1\left[(y+z+2)^{1/2} - (y-z+1)^{1/2}\right]dy\right]dz =$$

$$= 2\int_0^1\left[(y+z+2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3} - (y+z+1)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_{y=0}^{y=1}\right]dz =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1\left[(z+3)^{3/2} - (z+2)^{3/2} - (z+2)^{3/2} + (z+1)^{3/2}\right]dz =$$

$$= \frac{4}{3}\left[(z+3)^{5/2}\frac{2}{5} - (z+2)^{5/2}\frac{2}{5} - (z+2)^{5/2}\frac{2}{5} + (z+1)^{5/2}\frac{2}{5}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=1}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}\left[4^{5/2} - 3^{5/2} - 3^{5/2} + 2^{5/2} - 3^{5/2} + 2^{5/2} + 2^{5/2} - 1\right] =$$

$$= \frac{8}{15}\left[4^{5/2} - 3^{7/2} + 3\cdot 2^{5/2} - 1\right] = \frac{8}{15}\left(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}\right).$$

b) $$\iiint_{\Omega} xyzdxdydz = \iint_D\left[\int_0^{1-x-y} xyzdz\right]dxdy = \iint_D xy\frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dxdy =$$

$$\frac{1}{2}\iint_D xy(1-x-y)^2\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_D xy(1+x^2+y^2-2x-2y+2xy)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (xy + x^3y + xy^3 - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2)dxdy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le x \le 1\}$

Prin urmare,

$$\iiint_{\Omega} xyzdxdydz = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(xy + x^3y + xy^3 - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2)dy\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(x\frac{y^2}{2} + x^3\frac{y^2}{2} + x\frac{y^4}{4} - x^2y^2 - 2x\frac{y^3}{3} + 2x^2\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}\right]dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{x}{2}(1-x)^2 + \frac{x^3}{2}(1-x)^2 + \frac{x}{4}(1-x)^4 - x^2(1-x)^2 - \frac{2x}{3}(1-x)^3\right]dx =$$

$$\frac{1}{24}\int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5)dx =$$

$$= \frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{2} - 4\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{720}$$

Exerciţiul 9.2.10. Să se calculeze următoarele integrale:

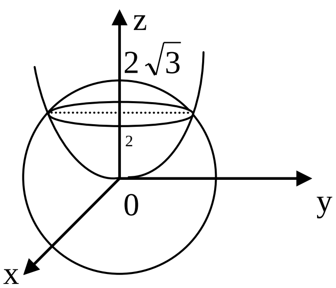
a) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, unde Ω este domeniul mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ şi paraboloidul $x^2 + y^2 = 4z$;

b) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$, unde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2 + y^2 \le 9,\ z \ge 0,\ x + y + z \le 6\}$$

Soluţii. a) Cele două suprafeţe se intersectează după cercul:

$$(C): \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ z = 2 \end{cases}.\ \text{Evident } 0 \le z \le 2\sqrt{3}$$



Aplicăm deci formula:

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^{2\sqrt{3}} \left[\iint\limits_{D_z} (x^2 + y^2 + z^2)dxdy\right]dz,$$

unde D_z este proiecţia pe planul xOy a unei secţiuni făcute în Ω cu un plan $z = z_0$, $z_0 \in [0, 2\sqrt{3}]$. D_z, este caracterizat de:

$$(D_z'):\ x^2 + y^2 \le 4z, \text{ dacă } z \in [0, 2] \text{ şi}$$

$$(D_z''):\ x^2 + y^2 \le 12 - z^2, \text{ dacă } z \in [2, 2\sqrt{3}]$$

Deci $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^2 \left[\iint\limits_{D_z'} (x^2 + y^2 + z^2)dxdy\right]dz +$

$$+ \int_2^{2\sqrt{3}} \left[\iint\limits_{D_z''} (x^2 + y^2 + z^2)dxdy\right]dz$$

Pentru calculul integralelor duble folosim coordonatele polare, întrucât (D_z') şi (D_z'') sunt discuri.

Pentru prima integrală dublă avem:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0, 2\sqrt{z}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, iar jacobianul este $J = r$.

Deci,

$$\iint_{D_z'}(x^2+y^2+z^2)dxdy = \int_0^{2\sqrt{z}}\left[\int_0^{2\pi}(r^2+z^2)\cdot r d\theta\right]dr = 2\pi\int_0^{2\sqrt{z}} r(r^2+z^2)dr =$$

$$2\pi\left[\frac{r^4}{4}+z^2\cdot\frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=2\sqrt{z}} = 4\pi z^2(2+z).$$

Pentru cea de a doua integrală dublă, avem:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r\in[0,\ \sqrt{12-z^2}\ ]$, $\theta\in[0,\ 2\pi]$.

Deci,

$$\iint_{D_z''}(x^2+y^2+z^2)dxdy = \int_0^{\sqrt{12-z^2}}\left[\int_0^{2\pi}(r^2+z^2)\cdot r d\theta\right]dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{12-z^2}} r(r^2+z^2)dr = \frac{\pi}{2}(144-z^4)$$

Aşadar,

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^2 4\pi z^2(2+z)dz + \int_2^{2\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}(144-z^4)dz = \frac{32\pi}{5}(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}).$$

b) Suntem îm situaţia a doua de la exerciţiul 9.3.2. pentru

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2:\ x^2+y^2 \le 9\}$, $\varphi_1(x, y) = 0$ şi $\varphi_2(x, y) = 6 - x - y$

Aplicăm deci formula adecvată, adică:

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_D\left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right]dxdy.$$

Deci

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iint_D\left[\int_0^{6-x-y}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right]dxdy$$

$$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot(6-x-y)dxdy$$

Calculăm această integrală prin trecere la coordonate polare. Avem:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0, 3]$; $\theta\in[0, 2\pi]$.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot(6-x-y)dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^3 r^2\cdot(6-r\cos\theta-r\sin\theta)dr\right]d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(6\cdot\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\cos\theta-\frac{r^4}{4}\sin\theta\right)\Bigg|_{r=0}^{r=3}\right]d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[54-\frac{3^4}{4}\cos\theta-\frac{3^4}{4}\sin\theta\right]d\theta = 108\pi$$

Exerciţiul 9.2.11. Să se calculeze următoarele integrale triple:

a) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, unde

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: y^2 + z^2 \le x^2, x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x \ge 0\}$;

b) $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$, unde Ω este domeniul limitat de conul

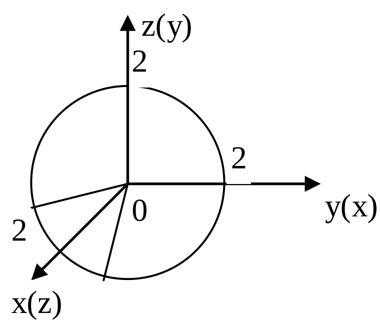
$$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \text{ şi planul } z = h;$$

c) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, unde Ω este domeniul mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Soluţii. a) Este convenabil să folosim transformarea:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

Noile variabile de integrare sunt r, θ, φ, iar pentru a determina domeniul Ω^* (domeniul transformat), înlocuim x(r, θ, φ), y(r, θ, φ), z (r, θ, φ) în inecuaţiile ce definesc domeniul Ω.



Din $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ rezultă $r^2 \le 4$, deci $r \in [0, 2]$.

Din $y^2 + z^2 \le x^2$ deducem că $r^2\sin^2\theta \le r^2\cos^2\theta$, adică $\sin^2\theta \le \cos^2\theta$, ceea ce este echivalent cu $\sin^2\theta \le \frac{1}{2}$.

(1)

Din $x \ge 0$ rezultă $r\cos\theta \ge 0$, adică $\cos\theta \ge 0$, de unde $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (2)

Din (1) şi (2) avem $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Deci $\Omega^* = \left\{(r,\theta,\varphi) \mid r \in [0,2], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \varphi \in [0,2\pi]\right\}$.

Jacobianul transformării este:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

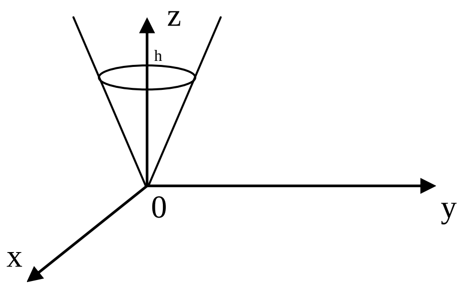
Integrala de calculat devine:

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \sin\theta d\varphi \right) d\theta dr = 2\pi \int_0^2 \left(\int_0^{\pi/4} r^4 \sin\theta d\theta \right) dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left[r^4 (-\cos\theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \right] dr = \pi(2-\sqrt{2}) \int_0^2 r^4 dr =$$

$$= \pi(2 - \sqrt{2}) \cdot \frac{r^5}{5} \Bigg|_{r=0}^{r=2} = \frac{2^5 \cdot \pi \cdot (2-\sqrt{2})}{5}.$$

b) Domeniul pe care se face integrarea este:



Este convenabil să folosim coordonatele cilindrice:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Avem $z \in [0, h]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ iar $z^2 \geq \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ ne dă $r \in \left[0, \frac{zR}{h}\right]$.

Aşadar, $\Omega^* = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq r \leq \frac{zR}{h}, \theta \in [0,2\pi], z \in [0,h]\}$.

Jacobianul este:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Integrala devine:

$$\int_0^h \left[\int_0^{zR/h} \left[\int_0^{2\pi} z r d\theta \right] dr \right] dz = 2\pi \int_0^h \left[\int_0^{zR/h} z r dr \right] dz = 2\pi \int_0^h z \frac{r^2}{2} \Bigg|_{r=0}^{r=zr?h} dz =$$

$$= 2\pi \int_0^h \left(\frac{z}{2} \cdot \frac{z^2 R^2}{h^2} \right) dz = \pi \int_0^h \frac{z^3 R^2}{h^2} dz = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \int_0^h z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}$$

d)Vom folosi coordonatele sferice generalizate, adică:

$$\begin{cases} x = \arcsin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$

Avem $\Omega^* = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ iar

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2 \sin\theta.$$

Integrala devine:

$$\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} abcr^2\sin\theta\sqrt{1-r^2}\,d\varphi d\theta dr = 2\pi abc\int_0^1\int_0^\pi r^2\sqrt{1-r^2}\sin\theta d\theta dr = 2\pi abc$$

$$\int_0^1\left[r^2\sqrt{1-r^2}\cdot(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right]dr = 4\pi abc\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr.$$

Pentru calculul acestei din urmă integrale facem schimbarea de variabilă
$r = \sin t$.

Deci $\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr = \int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t dt =$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt =$$

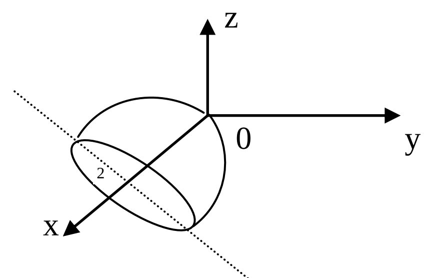
$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{16}.$$

$$\text{Deci: } \iiint_\Omega \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$$

$$= 4\pi abc\cdot\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr = 4\pi abc\frac{\pi}{16} = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

Exerciţiul 9.2.12. Să se calculeze volumul corpului mărginit de paraboloidul $x = \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$ şi planul de ecuaţie $x = 2$.

Soluţie. Corpul Ω al cărui volum trebuie să-l aflăm, este reprezentat în figura următoare:



Vom folosi coordonate cilindrice generalizate:

$$\begin{cases} x = x \\ y = 3r\cos\theta, \; x \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = 4r\sin\theta \end{cases}$$

Din x $\geq \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$ rezultă că x ≥ r^2, deci 0 ≤ r ≤ $\sqrt{x}$.

Aşadar, Ω^*= {(r, θ, x) | 0 ≤ r ≤ $\sqrt{x}$, θ∈ [0, 2π], x∈ [0, 2]}.

Jacobianul transformării este : $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,x)}$ = 12r.

Volumul este:

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz = \iiint_{\Omega} \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,x)} d\theta drdx = 12\iiint_{\Omega^*} rd\theta drdx =$$

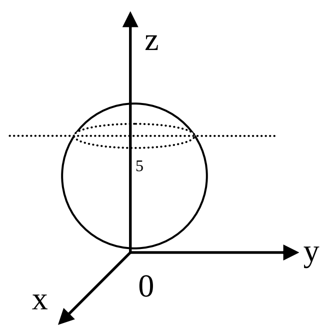
$$= 24\pi \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x}} rdr \right) dx = 24\pi \int_0^2 \left[\left. \frac{r^2}{2} \right|_{r=0}^{r=\sqrt{x}} \right] dx = 12\pi \int_0^2 xdx =$$

$$= 12\pi \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = 24\pi$$

Exerciţiul 9.2.13. Să se calculeze masa corpului Ω, mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$, ştiind că densitatea în fiecare punct este:

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

Soluţie. Se aplică formula M = $\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dxdydz$.



Avem z ∈ [0, 10] şi (D_z): $x^2 + y^2 \leq 10z - z^2$.

Deci M = $\int_0^{10} \left[\iint_{D_z} \rho(x,y,z)dxdy \right] dz$.

Pentru calculul integralei duble folosim coordonatele polare. Deci $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, iar D_z^* = {(r, θ) | 0 ≤ r ≤ $\sqrt{10z - z^2}$, θ ∈ [0, 2π]}

Avem, aşadar :

$$\iint_{D_z} \rho(x,y,z)dxdy = \int_0^{\sqrt{10z-z^2}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2+z^2} rd\theta \right] dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{10z-z^2}} \frac{1}{r^2+z^2} dr = \pi$$

$$\int_0^{\sqrt{10z-z^2}} \frac{(r^2+z^2)'}{r^2+z^2} dr = \pi \cdot \ln\left(r^2+z^2\right)\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{10z-z^2}} =$$

$= \pi \ln(10z) - \pi \ln(z^2)$.

Deci, M = $\int_0^{10} [\pi \ln(10z) - \pi \ln(z^2)]dz = \pi \int_0^{10} \ln\left(\frac{10}{z}\right)dz$ =

$= \pi \int_0^{10} \ln 10 dz - \pi \int_0^{10} \ln z dz = \pi \cdot 10 \cdot \ln 10 - \pi \int_0^{10} (z)' \ln z dz =$

$= 10 \pi \ln 10 - 10 \pi \ln 10 + \pi \int_0^{10} dz = \pi \cdot z\Big|_0^{10} = 10\pi$.

Exercițiul 9.2.14. Să se determine coordonatele centrului de greutate ale segmentului cilindric omogen:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le z \le 2y\}$$

Soluție. Corpul fiind omogen, funcția ρ este constantă.

Deci, $x_G = \frac{1}{v(\Omega)} \cdot \iiint_\Omega x dxdydz$; $y_G = \frac{1}{v(\Omega)} \cdot \iiint_\Omega y dxdydz$;

$z_G = \frac{1}{v(\Omega)} \cdot \iiint_\Omega z dxdydz$.

Notând $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0\}$. Avem:

- $v(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{2y} dz\right) dxdy = \iint_D 2y dxdy$ =

  $= 2\iint_D y dxdy = 2\iint_{D^*} r^2 \sin\theta dr d\theta = 2\int_0^3 \left(\int_0^\pi r^2 \sin\theta d\theta\right) dr$

  $= 2\int_0^3 \left[r^2 (-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}\right] dr = 4\int_0^3 r^2 dr = 4\frac{r^3}{3}\Big|_0^3 = 36$

- $\iiint_\Omega x dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{2y} x dz\right) dxdy = \iint_D xz\Big|_{z=0}^{z=2y} dxdy$ =

  $= \iint_D 2xy dxdy = 2\iint_{D^*} r^3 \sin\theta \cos\theta dr d\theta =$

  $= \int_0^3 r^3 dr \cdot \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = \frac{r^4}{4}\Big|_0^3 \cdot \left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi = 0$

- $\iiint_\Omega y dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{2y} y dz\right) dxdy = \iint_D yz\Big|_{z=0}^{z=2y} dxdy$ =

  $= \iint_D 2y^2 dxdy = 2\iint_{D^*} r^3 \sin^2\theta dr d\theta =$

  $= \frac{r^4}{4}\Big|_0^3 \cdot \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{3^4}{4}\left(\pi - \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^\pi\right) = 3^4 \frac{\pi}{4}$

- $\iiint_\Omega z dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{2y} z dz\right) dxdy = \iint_D \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=2y} dxdy$ =

$$= \frac{1}{2}\iint_D 4y^2dxdy = 2\iint_D y^2dxdy = 3^4\,\frac{\pi}{4}.$$

Rezultă $x_G = 0$; $y_G = z_G = \frac{1}{36}\cdot 3^4\,\frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{16}$.

Exercițiul 9.2.15. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu planele de coordonate ale corpului material omogen, limitat de suprafețele $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ și $z = c$.

Soluție. $I_{xOy} = \iiint_\Omega z^2dxdydz$ (corpul fiind omogen, considerăm densitatea egală cu unitatea).

Trecem la coordonate cilindrice generalizate:

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \\ z = z \end{cases},\ z\in[0, c],\ \theta\in[0, 2\pi]$$

Din $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{z^2}{c^2}$, obținem $r^2 \le \frac{z^2}{c^2}$, de unde $0 \le r \le \frac{z}{c}$.

Deci $\Omega^* = \{(r, \theta, z) \mid 0 \le r \le \frac{z}{c},\ \theta\in[0, 2\pi],\ z\in[0, c]\}$, iar jacobianul transformării este $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}$ = abr.

- $I_{xOy} = ab\iiint_{\Omega^*} z^2rd\theta drdz = 2\pi ab\int_0^c\left(\int_0^{z/c} z^2rdr\right)dz =$

  $$= 2\pi ab\int_0^c\left[z^2\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{r=\frac{z}{c}}\right]dz = \frac{\pi ab}{c^2}\int_0^c z^4dz = \frac{\pi ab}{c^2}\cdot\left.\frac{z^5}{5}\right|_0^c = \frac{\pi abc^3}{5}$$

- $I_{yOz} = \iiint_\Omega x^2dxdydz = a^3b\iiint_{\Omega^*} r^3\cos^2\theta d\theta drdz =$

  $$= a^3b\int_0^c\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{z/c} r^3\cos^2\theta dr\right]d\theta dz = \frac{a^3b}{4}\int_0^c\int_0^{2\pi}\frac{z^4}{c^4}\cos^2\theta d\theta dz =$$

  $$= \frac{a^3b}{4c^4}\int_0^c\left(\int_0^{2\pi}\frac{z^4(1+\cos 2\theta)}{2}d\theta\right)dz = \frac{a^3b}{8c^4}\int_0^c z^4\cdot 2\pi dz\ +$$

  $$+\ \frac{a^3b}{8c^4}\int_0^c\left[z^4\cdot\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right]dz = \frac{\pi a^3b}{4c^4}\cdot\left.\frac{z^5}{5}\right|_{z=0}^{z=c} = \frac{\pi a^3bc}{20}$$

- $I_{xOz} = \iiint_\Omega y^2dxdydz = ab^3\iiint_{\Omega^*} r^3\sin^2\theta d\theta drdz =$

  $$= ab^3\int_0^c\int_0^{2\pi}\frac{z^4}{4c^4}\sin^2\theta d\theta dz = \frac{ab^3}{4c^4}\int_0^c\int_0^{2\pi}\frac{z^4(1-\cos 2\theta)}{2}d\theta dz =$$

  $$= \frac{ab^3}{8c^4}\int_0^c z^4\cdot 2\pi dz - \frac{ab^3}{8c^4}\int_0^c\left[z^4\cdot\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right]dz = \frac{\pi ab^3}{4c^4}\cdot\left.\frac{z^5}{5}\right|_{z=0}^{z=c} = \frac{\pi ab^3c}{20}$$

10. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE PRIMUL TIP

10.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

10.1.1. Pânze şi suprafeţe netede

Definiţia 10.1.1.1. Se numeşte *pânză netedă* orice funcţie de clasă C^1,
$S : D \to \mathbb{R}^3$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă şi conexă (domeniu). Pânza S se numeşte *simplă*, dacă aplicaţia S este injectivă; ea se numeşte *nesingulară*, dacă, în fiecare punct din D, matricea jacobiană a lui S are rangul doi, imaginea directă a mulţimii D prin aplicaţia S, S(D), se numeşte *imaginea pânzei S* şi o vom nota (S).

Definiţia 10.1.1.2. Două pânze S_1: $D_1 \to \mathbb{R}^3$, $S_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ se numesc *echivalente* (se scrie $S_1 \sim S_2$) dacă există un difeomorfism $T:D_1 \to D_2$ astfel încât jacobianul lui T să fie strict pozitiv în fiecare punct din D_1 şi $S_1 = S_2 \circ T$. Difeomorfismul T se mai numeşte *schimbare de parametri.*

Observaţia 10.1.1.1. Folosind bijectivitatea lui T, se arată uşor că două pânze echivalente au aceeaşi imagine. De asemenea, este evident că relaţia "~" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea pânzelor, prin urmare, ea împarte această mulţime în clase de echivalenţă.

Definiţia 10.1.1.3. Se numeşte *suprafaţă netedă* orice clasă de echivalenţă a unei pânze netede nesingulare. Prin *imaginea unei suprafeţe* înţelegem imaginea unei pânze din clasa de echivalenţă respectivă. Deseori, se foloseşte termenul suprafaţă în sensul de imagine a unei suprafeţe. Această accepţiune conduce la următoarele interpretări:

1) Dacă $S:D \to \mathbb{R}^3$ este o pânză netedă, nesingulară, care asociază fiecărui punct $(u, v) \in D$ un punct $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in (S)$ se spune că egalităţile

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D$$

sunt *ecuaţiile parametrice ale suprafeţei* din care face parte pânza considerată. Evident, o suprafaţă poate avea mai multe reprezentări parametrice.
2) Ecuaţia $z = \varphi(x\ y)$, $(x, y) \in D$ se numeşte *ecuaţia explicită a unei suprafeţe*, şi anume, a suprafeţei reprezentată de pânza $S:D \to \mathbb{R}^3$,
$S(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$.
3) Ecuaţia $F(x, y, z) = 0$ este *ecuaţia implicită a unei suprafeţe* deoarece, în condiţiile teoremei funcţiilor implicite , se poate determina, local, o explicitare unică $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, care defineşte, evident, o pânză, $S(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$, $(u, v) \in D$. Imaginea acestei pânze este însă, în general, numai o parte a mulţimii $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$.
4) Sistemul: $F_1(x, y, z, u, v) = 0$, $F_2(x, y, z, u, v) = 0$, $F_3(x, y, z, u, v) = 0$ poate fi considerat o *reprezentare parametrică a unei suprafeţe*, deoarece, în anumite condiţii, el defineşte, local, pe x, y, z ca funcţii de u şi v.

10.1.2. Aria unei suprafeţe

Considerăm o suprafaţă reprezentată de o pânză S netedă şi simplă, definită explicit de ecuaţia $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil. Fie $d = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ o diviziune oarecare a domeniului D; acestei diviziuni îi corespunde o partiţie $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ a imaginii (S) a suprafeţei considerate. Fie $(x, y) \in D_i$, $i = 1, 2, ..., n$ arbitrar şi $M_i \in (S)$ punctul de coordonate x_i , y_i, $f(x_i, y_i)$. Considerăm planul π_i tangent la (S), în punctul M_i. Considerăm apoi cilindrul care are drept curbă directoare frontiera lui D_i şi generatoarele paralele cu Oz. Acest cilindru determină pe planul tangent π_i un domeniu T_i a cărui proiecţie pe planul xOy este D_i.

Aproximăm aria (S_i) prin aria(T_i) şi, prin urmare, aria imaginii (S) a suprafeţei prin $\sum_{i=1}^{n} aria(T_i)$. Evident, aproximarea este cu atât mai bună, cu cât diviziunea d este mai fină. Este natural, deci, să definim aria(S)

ca fiind $\lim_{\|d\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} aria(T_i)$ atunci când această limită există, este finită şi nu depinde de alegerea punctelor (x_i, y_i). Acceptând această idee se poate demonstra că:

$$\text{aria(S)} = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Dacă suprafaţa este dată parametric : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),
(u, v) $\in$ D atunci:

$$\text{aria(S)} = \iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

unde A = $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, B = $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$, C = $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

Observaţia 10.1.2.1. În cele prezentate mai sus am definit, de fapt, *aria imaginii unei pânze*. Cum imaginea unei suprafeţe este, prin definiţie, imaginea pânzei care determină suprafaţa, putem spune că am definit *aria imaginii unei suprafeţe*, dacă ţinem seama că integrala de mai sus nu depinde de pânza considerată ca reprezentant al suprafeţei date. Cum de obicei, se foloseşte termenul suprafaţă în loc de imagine a suprafeţei, putem spune că aria(S) este *aria suprafeţei* reprezentată de S.

10.1.3. Integrala de suprafaţă de primul tip

Definiţia 12.1.3.1. Fie o suprafaţă netedă reprezentată de pânza S definită parametric prin: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) $\in$ D, unde $D\subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil şi fie (S) $\subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Fie Φ : (S)→$\mathbb{R}$ o funcţie arbitrară, d = {D_1, D_2, ..., D_n} o diviziune arbitrară a domeniului D, ξ un sistem de “puncte intermediare” (u_i, v_i) $\in D_i$,
i = 1, 2, ..., n. Funcţiei Φ, diviziunii d şi sistemului ξ le asociem suma :

$$\sigma_\Phi(d,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\Phi(x_i,y_i,z_i)\cdot aria(S_i)$$

unde (S_i) = {(x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u,v)), (u, v) $\in D_i$},
(x_i, y_i, z_i) $\in$ (S_i), x_i = x(u_i, v_i), y_i =y(u_i, v_i), z_i = z(u_i, v_i), i 0 1, 2, ..., n.

Funcţia Φ se numeşte *integrabilă în raport cu aria* pe suprafaţa dată dacă există I$\in\mathbf{R}$ încât pentru orice ε > 0 există η > 0 astfel încât, oricare ar fi diviziunea d, cu ||d|| < η şi oricare ar fi sistemul ξ de puncte intermediare, să avem $|\sigma_\Phi(d,\xi)$ - I| < ε. Numărul real I se numeşte *integrala de suprafaţă în raport cu aria (sau integrala de suprafaţă de primul tip)* a funcţiei Φ şi se notează:

$$I = \iint_S \Phi(x,y,z)ds$$

Observaţia 10.1.3.1. a) Terminologia este justificată de faptul că, deşi numărul real I este asociat funcţiei Φ şi unei pânze S, se poate demonstra că, dacă se consideră o altă reprezentare parametrică a suprafeţei date (adică o pânză echivalentă cu S), numărul I nu se schimbă.

b) Dacă Φ(x, y, z) = 1, atunci evident I=a(S),deci a(S)= $\iint_S ds$.

Teorema 10.1.3.1. Fie o suprafaţă netedă şi simplă reprezentată de pânza S definită parametric prin: x = x(u,v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) $\in$ D unde $D\subset\mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil. Fie (S) $\subset\mathbb{R}^3$ imaginea sa, iar Φ : (S)→$\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci Φ este integrabilă în raport cu aria pe suprafaţa dată şi are loc egalitatea:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)ds=\iint_D \Phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\,dudv$$

Observaţia 10.1.3.2. a) Dacă suprafaţa este dată explicit de ecuaţia
z = f(x, y), (x, y) $\in$ D, atunci:

$$\iint_S \Phi(x,y,z)ds =$$

$$\iint_D \Phi(x,y,f(x,y))\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

b) Integrala de suprafaţă are proprietăţi analoage integralelor duble: liniaritatea în raport cu funcţia, aditivitatea în raport cu descompunerea imaginii suprafeţei într-un număr finit de părţi fără puncte interioare comune, etc. În consecinţă, dacă suprafaţa este dată implicit, printr-o ecuaţie care nu poate fi explicitată în raport cu nici una dintre variabile, se poate încerca descompunerea imaginii sale într-un număr finit de părţi explicitabile în raport cu câte o variabilă şi apoi se adună integralele obţinute.

10.1.4. Aplicaţii ale integralelor de suprafaţă de primul tip

10.1.4.1.Masa unei suprafeţe materiale

Dacă imaginea (S) $\subset \mathbf{R}^3$ modelează o suprafaţă materială, iar
ρ : (S) $\to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă care asociază fiecărui punct
(x, y, z) $\in$ (S) densitatea ρ(x, y, z) a suprafeţei materiale în acest punct, atunci masa m, este dată de :

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)ds$$

10.1.4.2. Centrul de greutate al unei suprafeţe materiale

În aceleaşi condiţii, coordonatele centrului de greutate G al suprafeţei materiale modelate de (S) sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y,z)ds,\quad y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y,z)ds,$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x,y,z)ds$$

10.1.4.3. Momentele de inerţie ale unei suprafeţe materiale

Momentele de inerţie ale suprafeţei materiale, modelată de (S), în raport cu axele de coordonate sunt:

$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$$

$$I_y = \iint_S (x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$$

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$$

Momentele de inerţie faţă de originea axelor de coordonate şi faţă de planele de coordonate se definesc analog.

10. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE PRIMUL TIP

10.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 10.2.1. Să se calculeze $\iint_S z^2 dS$, unde S este dată parametric prin: x = u cos v, y = u sin v, z = hu, u$\in$[0, a], v$\in$[0, 2π].

Soluţie. Deoarece S este dată parametric se aplică direct formula din teorema 10.1.3.1. Calculăm mai întâi:

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ h & 0\end{vmatrix}=-hu\cos v$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}h & 0\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=-hu\sin v$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\cos^2 v + + u\sin^2 v = u$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = h^2u^2\cos^2 v + h^2u^2\sin^2 v + u^2 =$$
$$= h^2u^2 + u^2 = (h^2 + 1)\, u^2$$

Deci $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=u\sqrt{h^2+1}$.

Notând D = [0, a] x [0, 2π], cu formula din teorema 10.1.3.1. obţinem:

$$\iint_S z^2 dS = h^2\sqrt{h^2+1}\iint_D u^3 du dv = h^2\sqrt{h^2+1}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4 h^2\sqrt{h^2+1}}{2}$$

Exerciţiul 10.2.2. Să se calculeze $\iint_S (xy+yz+zx)dS$, unde S este porţiunea suprafeţei conice z = $\sqrt{x^2+y^2}$ decupată de suprafaţa $x^2 + y^2 = 2ax$.

Soluţie. Suprafaţa fiind dată explicit, aplicăm formula din observaţia 10.1.3.2.Notând f(x, y) = $\sqrt{x^2+y^2}$ şi D$\subset\mathbb{R}^2$ discul limitat de cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 2ax$, rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}\text{, deci}$$

$$\iint_S (xy+yz+zx)dS = \sqrt{2}\iint_D (xy + y\sqrt{x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

Trecând la coordonate polare, integrala devine:

$$\sqrt{2}\iint_{D^*}(r^2\sin t\cos t + r^2\sin t + r^2\cos t)r dr dt =$$
$$= \sqrt{2}\iint_{D^*} r^3(\sin t\cos t + \sin t + \cos t)dr dt$$

unde $D^* = \{(r, t): 0 \le r \le 2a\cos t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\}$.

Prin urmare,

$$\iint_S (xy+yz+zx)dS = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[(\sin t\cos t+\sin t+\cos t)\int_0^{2a\cos t} r^3 dr\right]dt$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[(\sin t\cos t+\sin t+\cos t)\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos t}\right]dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 16a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin t\cos t+\sin t+\cos t)\cos^4 t dt =$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cos^5 t dt+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin t\cos^4 t dt+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5 t dt\right]$$

$$= 4\sqrt{2}a^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5 t dt = 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}\cos^5 t dt =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)^2\cos t dt = = 8\sqrt{2}a^4\int_0^{\pi/2}(1-2\sin^2 t+\sin^4 t)(\sin t)' dt =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\left(\sin t-2\cdot\frac{\sin^3 t}{3}+\frac{\sin^5 t}{5}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= 8\sqrt{2}a^4\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

Exercițiul 10.2.3. Să se calculeze $\iint_S (x+y+z)dS$ unde S este emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$.

Soluție. Ecuațiile parametrice ale emisferei S sunt:

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta\cos\varphi, \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \varphi \in [0, 2\pi] \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$$

Calculăm :

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi \\ -2\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = 4\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\sin\theta & 0 \\ 2\cos\theta\cos\varphi & -2\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = 4\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta\cos\varphi & -2\sin\theta\sin\varphi \\ 2\cos\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = =4\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + 4\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi =$$

$$4\sin\theta\cos\theta$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = 16\sin^4\theta\cos^2\varphi + 16\sin^4\theta\sin^2\varphi + 16\sin^2\theta\cos^2\theta = 16\sin^4\theta + +16\sin^2\theta\cos^2\theta = 16\sin^2\theta$$

Deci $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 4\sin\theta$

Aplicând acum formula din teorema 10.1.3.1., notând D = $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$x[0, 2π], obţinem :

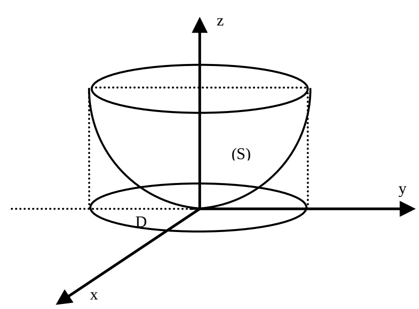
$$\iint_S (x + y + z)dS = \iint_D (2\sin\theta\cos\varphi + 2\sin\theta\sin\varphi + 2\cos\theta)\cdot 4\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= 8\iint_D (\sin^2\theta\cos\varphi + \sin^2\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\theta)d\theta d\varphi =$$

$$8\left[\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi + 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\right] = 8\pi$$

Exerciţiul 10.2.4. Să se calculeze aria porţiunii din paraboloidul $x^2+y^2 = 3z$ mărginită de planul z = 3.
Soluţie. Deoarece suprafaţa este definită explicit în raport cu variabila z, utilizăm formula:

$$a(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$



Deoarece f(x, y) = $\frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ şi D = {(x, y)$\in \mathbb{R}^2$: $x^2 + y^2 \le 9$} obţinem a(S) = $\iint_D \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9}y^2}\, dxdy$.

Trecând la coordonate polare: x = r cos t, y = r sin t, r∈ [0, 3], t ∈ [0, 2π],
$\frac{D(x,y)}{D(r,t)}$ = r. Notând D^* = [0, 3] x [0, 2 π], obţinem:

'

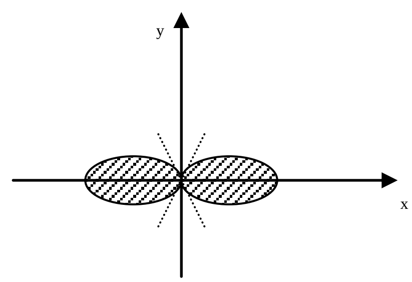
a(S) = $\iint\limits_{D^*} \sqrt{1+\frac{4}{9}r^2}\cdot rdrdt = 2\pi\frac{9}{8}\int\limits_0^3 \left(1+\frac{4}{9}r^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{4}{9}r^2\right)' dr =$

$= \frac{9\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{4}{9}r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3 = \frac{3\pi}{2}\left[\left(1+\frac{4}{9}\cdot 9\right)^{\frac{3}{2}}-1\right] = \frac{3\pi}{2}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

Exercițiul 10.2.5. Să se determine aria porțiunii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, decupată de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, situată în semispațiul $z \geq 0$.
Soluție. Ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu condiția $z \geq 0$ se poate explicita
$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
Cilindrul are generatoarele paralele cu Oz și are directoare în planul xOy lemiscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, prin urmare:

$$a(S) = \iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy\,,$$

unde D este domeniul mărginit de lemniscată.



Trecând la coordonate polare și notând

$$D^* = \left\{(r,t): 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2t}, t \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]\right\},$$

obținem $a(S) = a\iint\limits_{D^*} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,drdt = 4a\int\limits_0^{\pi/4}\left[\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2t}} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\right]dt =$

$$= 4a\int\limits_0^{\pi/4}(a - a\sqrt{2}\sin t)dt = 4a\left(\frac{\pi}{4}a + a\sqrt{2}\cos t\Big|_0^{\pi/4}\right) =$$

$$= 4a^2\left[\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right] = 4a^2\left(\frac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\right) = a^2(\pi+4-4\sqrt{2})$$

Exercițiul 10.2.6. Să se determine masa suprafeței materiale (S) dată prin
$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 1$, dacă densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = z$.

Soluție. Proiecția porțiunii din paraboloidul $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ corespunzătoare condiției $z \leq 1$ este: D = {(x, y): $x^2 + y^2 \leq 2$}.

Punând f(x, y) = $\frac{1}{2}$ ($x^2 + y^2$), obţinem:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}\ .$$

Aplicăm acum formula 10.1.4.1. obţinem:

$$m(S) = \iint_S \rho(x,y,z)dS = \iint_S zdS = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, \sqrt{2}\,] \times [0, 2\pi]$, obţinem:

$$m = \frac{1}{2}\iint_{D^*} r^2\sqrt{1+r^2}\,rdrdt = \frac{1}{2}\iint_{D^*} r^3\sqrt{1+r^2}\,drdt = \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3(1+r^2)}{\sqrt{1+r^2}}dr = \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^2(\sqrt{1+r^2})'dr + \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^4(\sqrt{1+r^2})'dr =$$

$$= \pi\left[r^2\sqrt{1+r^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2r\sqrt{1+r^2}\,dr + r^4\sqrt{1+r^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \right.$$

$$\left. -4\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr \right] = \pi\left[2\sqrt{3} - \frac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} + 4\sqrt{3} - \right.$$

$$\left. -4\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr \right] = \left(4\sqrt{3}+\frac{2}{3}\right)\pi - 4\pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr =$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right) - 4m.$$

Rezultă $5m = \frac{2\pi}{3}(1+6\sqrt{3})$, deci $m = \frac{2\pi}{15}(1+6\sqrt{3})$.

Exerciţiul 10.2.7. Să se determine coordonatele centrului de greutate al emisferei materiale S dată prin $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, ştiind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Soluţie. Vom folosi formulele 10.1.4.2. Determinăm mai întâi masa emisferei $m = \iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$.

Ecuaţiile parametrice ale emisferei S sunt $x = a\sin\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\sin\varphi$,

$z = a\cos\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ca în exerciţiul 10.3.3. obţinem $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = a^2\sin\theta$ şi m =

$$\iint_D \sqrt{a^2\sin^2\theta}\cdot a^2\sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= a^3\iint_D \sin^2\theta d\theta d\varphi = 2\pi a^3\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \pi a^3\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}a^3$$

Determinăm acum coordonatele centrului de greutate:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y,z)dS = \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S x\sqrt{x^2+y^2}\,dS =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S a^4 \sin^3\theta\cos\varphi d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\right) = 0$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y,z)dS = \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S y\sqrt{x^2+y^2}dS =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S a^4 \sin^3\theta\sin\varphi d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\right) = 0$$

$$z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x,y,z)dS = \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S z\sqrt{x^2+y^2}dS =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 a^3}\iint_S a^4 \sin^3\theta\cos\theta d\theta d\varphi = \frac{2a}{\pi^2}\cdot 2\pi\cdot\left.\frac{\sin^3\theta}{3}\right|_0^{\pi/2} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Exercițiul 10.2.8. Să se determine momentul de inerție, în raport cu planul xOy al porțiunii de suprafață $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$, știind că densitatea în fiecare punct este $\rho(x, y, z) = 1 + xy$.

Soluție. Momentul de inerție, în raport cu planul xOy este:

$$I_{xOy} = \iint_S z^2\rho(x,y,z)dS = \iint_S z^2(1+xy)dS =$$

$$= \iint_D (x^2+y^2)(1+xy)\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)(1+xy)dxdy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ obținem:

$$I_{xOy} = \sqrt{2}\iint_{D^*} r^2(1+r^2\sin\theta\cos\theta)\cdot r dr d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\iint_{D^*} r^3(1+r^2\sin\theta\cos\theta)drd\theta = \sqrt{2}\iint_{D^*} r^3 drd\theta +$$

$$+ \sqrt{2}\iint_{D^*} r^5\sin\theta\cos\theta drd\theta =$$

$$= \sqrt{2}\cdot 2\pi\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 + \left(\int_0^1 r^5 dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENŢI

11.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

11.1.1. Elemente de teoria câmpurilor

Definiţia 11.1.1. 1. Fie *$D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă. O funcţie $U:D \to \mathbb{R}$ se numeşte* ***câmp scalar***.

Dacă $U:D \to \mathbb{R}$ este un câmp scalar fixat *şi $c \in \mathbb{R}$ este fixat, suprafaţa (S_c) de ecuaţie $U(x, y, z) = c$, se numeşte* ***suprafaţă de nivel constant*** *asociată câmpului U şi numărului c.*

Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ şi $c \in \mathbb{R}$ este fixat,curba (γ_c) de ecuaţie implicită $U(x, y) = c$, se numeşte ***curba de nivel constant*** *asociată câmpului U şi lui c.*

Definiţia 11.1.1.2. *Fie A şi B două puncte oarecare din $\mathbb{R}^3$. Perechea ordonată (A, B) se numeşte* ***vector tangent la*** *$\mathbb{R}^3$ în punctul A (sau* ***segment orientat*** *sau* ***vector legat****) şi se notează $\overrightarrow{AB}$. Punctul A se numeşte originea sau* ***punctul de aplicaţie al vectorului.***

Dacă O = (0, 0, 0) este originea lui $\mathbb{R}^3$, atunci $\overrightarrow{OB}$ se numeşte **vectorul de poziţie** al punctului B.

Punctul $V = B - A \in \mathbb{R}^3$ se numeşte **partea vectorială a vectorului tangent** şi în loc de $\overrightarrow{AB}$ putem nota $\overrightarrow{V}_A$ sau chiar $\overrightarrow{V}$ dacă punctul de aplicaţie se subînţelege.

Definiţia 11.1.1.3. *Doi vectori tangenţi care au aceeaşi parte vectorială, dar au puncte de aplicaţie diferite se numesc* ***paraleli***.

Definiţia 11.1.1.4. *Dacă $A \in \mathbb{R}^3$ este fixat, mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\mathbb{R}^3$ în A se numeşte* ***spaţiu tangent la*** *$\mathbb{R}^3$ în punctul A şi se notează cu $T_A\mathbb{R}^3$.*

Spaţiul tangent se organizează ca spaţiu vectorial cu operaţiile

$$\overrightarrow{V}_A + \overrightarrow{W}_A = \overrightarrow{(V+W)}_A \text{ şi } \lambda\cdot\overrightarrow{V}_A = \overrightarrow{\lambda V}_A$$

şi este izomorf cu $\mathbb{R}^3$, izomorfismul fiind dat de corespondenţa $V \to \overrightarrow{V}_A$.

Norma (lungimea) vectorului $\overrightarrow{V}_A$ se defineşte prin

$$\| \overrightarrow{V}_A \| = \| V \|$$

Produsul scalar în $T_A\mathbb{R}^3$ se defineşte cu ajutorul produsului scalar din $\mathbb{R}^3$ prin

$$\left\langle \overrightarrow{V}_A, \overrightarrow{W}_A \right\rangle = \langle V, W \rangle .$$

Dacă $\langle V, W \rangle = 0$, atunci $\overrightarrow{V}_A$, $\overrightarrow{W}_A$ se numesc ortogonali.

Un sistem ordonat de trei versori (vectori de normă 1) reciproc ortogonali, tangenţi la $\mathbb{R}^3$ în A se numeşte ***reper în punctul A***.

Dacă { $\overrightarrow{E}_1$, $\overrightarrow{E}_2$, $\overrightarrow{E}_3$ } este un reper în punctul A , atunci orice $\overrightarrow{V} \in T_A\mathbb{R}^3$ se scrie

$$\overrightarrow{V} = \left\langle \overrightarrow{V}, \overrightarrow{E}_1 \right\rangle \cdot \overrightarrow{E}_1 + \left\langle \overrightarrow{V}, \overrightarrow{E}_2 \right\rangle \cdot \overrightarrow{E}_2 + \left\langle \overrightarrow{V}, \overrightarrow{E}_3 \right\rangle \cdot \overrightarrow{E}_3$$

Numerele reale $v_i = \left\langle \overrightarrow{V}, \overrightarrow{E}_i \right\rangle$, *i = 1,2,3* se numesc ***componentele lui*** $\overrightarrow{V}$ în raport cu reperul fixat.

Dacă notăm $\vec{i}_A = \overrightarrow{(1,0,0)}_A$, $\vec{j}_A = \overrightarrow{(0,1,0)}_A$, $\vec{k}_A = \overrightarrow{(0,0,1)}_A$ atunci reperul $\{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ se numeşte **reper natural** în punctul A, iar componentele unui vector în acest reper se numesc **componente euclidiene**.

Definiţia 11.1.1.5 *O funcţie $\vec{V}$ care asociază fiecărui punct A din $D \subset \mathbb{R}^3$ un vector $\vec{V}_A = \vec{V}(A)$, tangent la $\mathbb{R}^3$ în A se numeşte **câmp vectorial**.*

Definiţia 11.1.1.6. *Dacă $\vec{V} : D \to \bigcup_{A\in D} T_A\mathbb{R}^3$ are proprietatea că $\vec{V}(A_1)$ este paralel cu $\vec{V}(A_2)$ pentru orice $A_1, A_2 \in D$, atunci $\vec{V}$ se **numeşte câmp vectorial paralel sau constant.***

Câmpurile paralele $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ definite prin

$$\vec{i}(A) = \vec{i}_A, \quad \vec{j}(A) = \vec{j}_A, \; \vec{k}(A) = \vec{k}_A$$

se numesc **câmpuri fundamentale**.

Se poate demonstra că, dacă $\vec{V} : D \to \bigcup_{A\in D} T_A\mathbb{R}^3$ este un câmp vectorial, atunci există trei funcţii reale $V_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ astfel încât

$$\vec{V} = V_1 \cdot \vec{i} + V_2 \cdot \vec{j} + V_3 \cdot \vec{k}$$

Funcţiile scalare V_1, V_2, V_3 se numesc **componentele euclidiene** ale câmpului $\vec{V}$.

Se observă că orice câmp vectorial $\vec{V} : D \to \bigcup_{A\in D} T_A\mathbb{R}^3$ este echivalent cu o funcţie vectorială

$$\vec{V} : D \to \mathbb{R}^3, \; \vec{V}(A) = (V_1(A), V_2(A), V_3(A))$$

unde $V_1, V_2, V_3 : D \to \mathbb{R}$ sunt componentele euclidiene ale câmpului vectorial $\vec{V}$. Spunem că un câmp este de clasă C^k dacă componentele sale sunt de clasă C^k.

Definiţia 11.1.1.7. *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $U : D \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe D.*

Câmpul vectorial $\vec{V}$ definit prin

$$\vec{V} = grad\, U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

*se numeşte **câmp de gradienţi** asociat câmpului scalar U.*

Priu urmare, în orice punct $A \in D$, ***gradientul câmpului scalar U*** este

$$(grad\, U)(A) = \frac{\partial U}{\partial x}(A) \cdot \vec{i}_A + \frac{\partial U}{\partial y}(A) \cdot \vec{j}_A + \frac{\partial U}{\partial z}(A) \cdot \vec{k}_A$$

Proprietăţile de calcul ale gradientului rezultă direct din proprietăţile derivatelor parţiale.

Definiţia 11.1.1.8. Fie *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D, de componente $V_1, V_2, V_3 : D \to \mathbb{R}$. Se numeşte **divergenţa** câmpului vectorial $\vec{V}$ câmpul scalar*

$$div\, \vec{V} : D \to \mathbb{R}, \; div\, \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Se numeşte ***rotorul*** *câmpului vectorial* $\vec{V}$ *câmpul vectorial*

$$rot\ \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\cdot \vec{k}$$

Această egalitate poate fi reţinută uşor folosind scrierea formală

$$rot\ \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

("dezvoltând" acest determinant simbolic după prima linie)

Observaţia 11.1.1.1. Există o posibilitate de uniformizare a proprietăţilor de calcul ale gradientului, divergenţei şi rotorului, pentru câmpul de clasă C^1, cu ajutorul unui operator simbolic:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot \vec{k}$$

numit *operatorul lui Hamilton sau operatorul* ∇ *(nabla).*

Cele trei operaţii de bază din calculul vectorial (înmulţirea cu scalari, produsul scalar, produsul vectorial) aplicate "vectorului" ∇ vor conduce la cei trei operatori diferenţiali definiţi anterior.

Astfel, convenind să definim "produsul" lui $\frac{\partial}{\partial x}$ (respectiv, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$) cu un camp scalar φ ca fiind $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ (respectiv, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$) obţinem:

- dacă U este un câmp scalar de clasă C^1, înmulţirea dintre "vectorul" ∇ şi câmpul scalar U conduce la

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot \vec{k} = grad\ U$$

- dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 de componente V_1, V_2, V_3 produsul scalar dintre "vectorul" ∇ şi câmpul vectorial $\vec{V}$ conduce la:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = div\ \vec{V}$$

- produsul vectorial dintre "vectorul" ∇ şi câmpul vectorial $\vec{V}$ conduce la

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = rot\ \vec{V}$$

Observaţia 11.1.1.2. Când un câmp descrie un fenomen care are anumite simetrii, atunci este mai comod a se lucra în alte coordonate decât cele carteziene, deoarece gradientul, divergenţa, rotorul au expresii mai simple.

De exemplu, dacă U este de forma $U(x, y, z) = f(x^2 + y^2)$ atunci acest câmp se numeşte **câmp cu simetrie axială**, suprafeţele de nivel constant sunt, în acest caz suprafeţe cilindrice, iar studiul unui asemenea câmp se face uşor utilizând coordonatele cilindrice.

Analog, dacă $U(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$ atunci U este **câmp cu simetrie sferică**, suprafeţele de nivel constant sunt sfere concentrice, având centrul în origine, iar pentru studiul unui asemenea câmp sunt indicate coordonatele sferice.

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $T:D \to \mathbb{R}^3$ o schimbare de coordonate de componente f_1, f_2, f_3 şi fie $D^* = T(D)$.

Punctul curent din D^* are coordonatele carteziene x, y, z şi coordonatele curbilinii u, v, w astfel încât

$$\begin{cases} x = f_1(u,v,w) \\ y = f_2(u,v,w) \\ z = f_3(u,v,w) \end{cases}$$

Vectorul de poziţie al punctului curent din D^* este

$$\vec{r} = f_1(u, v, w)\,\vec{i} + f_2(u, v, w)\,\vec{j} + f_3(u, v, w)\,\vec{k}$$

Notăm cu $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_w$ versorii vectorilor $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{r}_w$ şi cu R_u, R_v, R_w normele aceloraşi vectori (parametrii lui Lamé):

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u},\ \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v},\ \vec{r}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

$$R_u = \|\vec{r}_u\|,\ R_v = \|\vec{r}_v\|,\ R_w = \|\vec{r}_w\|$$

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{r}_u}{R_u},\ \vec{e}_v = \frac{\vec{r}_v}{R_v},\ \vec{e}_w = \frac{\vec{r}_w}{R_w}$$

Dacă $U:D^* \to \mathbb{R}$ este un câmp de scalari exprimat în coordonate carteziene. Acest câmp poate fi exprimat şi în coordonate curbilinii considerând funcţia

$$U^* = U \circ T.$$

Teorema 11.1.1.1. a) Dacă $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ este un reper ortogonal, atunci gradientul se exprimă astfel:

$$grad\, U^* = \frac{1}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u} \cdot \vec{e}_u + \frac{1}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v} \cdot \vec{e}_v + \frac{1}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w} \cdot \vec{e}_w$$

b) Pentru câmpul vectorial exprimat în coordonate carteziene prin

$$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z) \cdot \vec{i} + V_2(x, y, z) \cdot \vec{j} + V_3(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

şi în coordonate curbilinii prin

$$\vec{V}^*(u, v, w) = V_1^*(u, v, w) \cdot \vec{e}_u + V_2^*(u, v, w) \cdot \vec{e}_v + V_3^*(u, v, w) \cdot \vec{e}_w$$

rotorul şi divergenţa se exprimă astfel:

$$rot\, \vec{V}^* = \frac{1}{R_u R_v R_w} \cdot \begin{vmatrix} R_u \vec{e}_u & R_v \vec{e}_v & R_w \vec{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ R_u V_1^* & R_v V_2^* & R_w V_3^* \end{vmatrix}$$

$$div\, \vec{V}^* = \frac{1}{R_u R_v R_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(R_v R_w V_1^*) + \frac{\partial}{\partial v}(R_u R_w V_2^*) + \frac{\partial}{\partial w}(R_u R_v V_3^*)\right]$$

Observaţia 11.1.1.3. Punând în această ultimă formulă $V_1^* = \frac{1}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u}$,

$V_2^* = \frac{1}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v}$, $V_3^* = \frac{1}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w}$ care sunt componentele vectorului *grad* U^* deducem formula de calcul a laplacianului în coordonate curbilinii ortogonale:

$$\Delta f = div(grad\ U^*) = \frac{1}{R_u R_v R_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_v R_w}{R_u} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial u}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R_u R_w}{R_v} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{R_u R_v}{R_w} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial w}\right)\right]$$

11.1.2. Integrala curbilinie de al doilea tip

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum. Atunci când parametrul t creşte de la a la b, punctul $\gamma(t)$ parcurge imaginea drumului γ într-un sens pe care-l numim sens direct sau pozitiv. Când t descreşte de la b la a, punctul $\gamma(t)$ parcurge imaginea drumului γ în sens invers.

Se numeşte *drum orientat* un drum pentru care s-a stabilit un sens de parcurgere a drumului.

Cum două drumuri echivalente au aceeaşi orientare, se poate vorbi despre orientarea unei curbe.

O curbă pentru care se precizează sensul de parcurgere a unui drum care îi aparţine, se numeşte *curbă orientată*.

Definiţia 11.1.2.1. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum neted şi orientat, definit prin x = f(t), y = g(t), z = h(t), $t \in [a, b]$ şi $(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa.

Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente $V_1, V_2, V_3 : (\gamma) \to \mathbb{R}$. Fie d= $(a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ o diviziune a intervalului [a, b] şi

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii d.

Considerăm suma:

$$\sigma_{\vec{V}}(\Delta, \theta) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{V} \circ \gamma\right)(\theta_i)\left(\vec{r_i} - \vec{r}_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n}[V_1(\gamma(\theta_i))(f(t_i) - f(t_{i-1})) +$$

$$+ V_2(\gamma(\theta_i))(g(t_i) - g(t_{i-1})) + V_3(\gamma(\theta_i))(h(t_i) - h(t_{i-1}))]$$

Câmpul vectorial $\vec{V}$ se numeşte *integrabil în raport cu coordonatele pe drumul* γ dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune d cu $\|d\| < \delta$ şi orice sistem θ de puncte intermediare, să avem:

$$\left|\sigma_{\vec{V}}(\Delta, \theta) - I\right| < \varepsilon$$

Numărul I se numeşte *integrala curbilinie în raport cu coordonatele sau integrala curbilinie de al doilea tip* a câmpului vectorial $\vec{V}$ pe drumul γ .

Se notează I = $\int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r}$ (unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie

$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ al punctului curent pe (γ)) sau

$$I = \int_\gamma V_1(x, y, z)dx + V_2(x, y, z)dy + V_3(x, y, z)dz$$

Observaţia 11.1.2.1. Se poate demonstra că dacă $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe un drum γ, atunci el este integrabil pe orice alt drum din clasa de echivalenţă a lui γ şi valoarea integralei e aceeaşi. Aceasta justifică folosirea denumirii de integrală curbilinie.

Teorema 11.1.2.1. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ un drum neted şi orientat definit prin x = f(t), y = g(t), z = h(t) şi $(\gamma) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente continue $V_1, V_2, V_3 : (\gamma) \to \mathbb{R}$. Atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe γ şi are loc egalitatea:

$$\int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r} = \int_a^b [V_1(\gamma(t)) \cdot f'(t) + V_2(\gamma(t)) \cdot g'(t) + V_3(\gamma(t)) \cdot h'(t)]dt$$

Teorema 11.1.2.2. *(Proprietăţile integralei curbilinii de al doilea tip)*

a)Dacă $\vec{V_1}$ şi $\vec{V_2}$ sunt două câmpuri vectoriale integrabile în raport cu coordonatele pe drumul neted şi orientat γ, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea:

$$\int_\gamma \left(\alpha \vec{V_1} + \beta \vec{V_2}\right) d\vec{r} = \alpha \int_\gamma \vec{V_1}\, d\vec{r} + \beta \int_\gamma \vec{V_2}\, d\vec{r}$$

b) Dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial integrabil în raport cu coordonatele pe γ_1, γ_2, atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe $\gamma_1 \cup \gamma_2$ şi

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \vec{V}\, d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{V}\, d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{V}\, d\vec{r}$$

c) Dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial integrabil în raport cu coordonatele pe drumul neted γ, atunci $\vec{V}$ este integrabil şi pe opusul γ^* al lui γ şi

$$\int_{\gamma^*} \vec{V}\, d\vec{r} = - \int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r}$$

Teorema 11.1.2.3. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, γ(t) = (f(t), g(t)) un drum orientat şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente $V_1, V_2 : (\gamma) \to \mathbb{R}$ continue. Atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele pe γ şi are loc egalitatea:

$$\int_\gamma V_1(x, y)dx + V_2(x, y)dy = \int_a^b [V_1(f(t), g(t)) \cdot f'(t) + V_2(f(t), g(t)) \cdot g'(t)]dt$$

Observaţia 11.1.2.2. a) Pentru a pune în evidenţă faptul că o integrală curbilinie este calculată pe o curbă simplă, închisă, parcursă în sens pozitiv (lăsând în stânga domeniul mărginit de ea) se foloseşte notaţia

$$\oint_\gamma V_1(x, y)dx + V_2(x, y)dy$$

b) *Lucrul mecanic* efectuat de un câmp de forţe $\vec{V}$ care acţionează asupra unui punct material deplasându-l pe imaginea drumului γ este

$$L = \int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r}.$$

11.1.3. Independenţa de drum a integralelor curbilinii de al doilea tip. Caracterizarea câmpurilor de gradienţi.

Definiţia 11.1.3.1. Un camp vectorial $\vec{V}$ de clasă C^1 se numeşte *câmp potenţial* sau *câmp de gradineţi* pe mulţimea D dacă există un câmp scalar U : D→ ℝ astfel încât $\vec{V}$ = *grad U*, adică

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z)\,\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z)\,\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z)\,\vec{k}$$

pentru orice (x, y, z) ∈ A.

Câmpul U se numeşte *potenţialul scalar* al câmpului vectorial $\vec{V}$.

Observaţia 11.1.3.1. Un câmp de gradienţi are o infinitate de potenţiale scalare, care diferă între ele printr-un camp constant.

Teorema 11.1.3.1. Fie $\vec{V}$ un câmp de gradienţi pe mulţimea $D \subset \mathbb{R}^3$ şi
$U : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un potenţial scalar al său. Fie γ : [a, b] →D un drum neted şi orientat. Atunci:

$$\int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

(formula Leibnitz-Newton pentru integrala curbilinie a câmpurilor de gradienţi)

Teorema 11.1.3.2. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime *deschisă şi conexă* şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\vec{V}$ este câmp de gradienţi în D;
b) pentru orice γ : [a, b] →D drum neted, orientat şi închis
(adică γ(a) = γ(b)), are loc relaţia $\int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r} = 0$;
c) oricare ar fi două drumuri netede şi orientate γ_1 : [a, b] →D,
γ_2 : [a, b] →D cu $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ şi $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, avem:

$$\int_{\gamma_1} \vec{V}\, d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{V}\, d\vec{r}$$

Observaţia 11.1.3.2. Un drum neted, orientat şi închis se numeşte contur, iar $\int_\gamma \vec{V}\, d\vec{r}$ se mai numeşte *circulaţia câmpului vectorial* $\vec{V}$ pe conturul γ.
Teorema anterioară se poate enunţa şi astfel:

Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă şi conexă şi $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 pe D, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\vec{V}$ este câmp de gradienţi în D;

b) circulaţia lui $\vec{V}$ pe orice contur din D este nulă;

c) $\int\limits_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r}$ este independentă de γ, depinzând numai de capetele drumului, în D.

Teorema 11.1.3.3. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă şi conexă
$\vec{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\,\vec{i} + V_2(x, y, z)\,\vec{j} + V_3(x, y, z)\,\vec{k}$, $(x, y, z) \in D$ un câmp de gradienţi în D şi $(x_0, y_0, z_0) \in D$ fixat.

Atunci $U : D \to \mathbb{R}$ definit prin

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} V_1(t, x_0, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} V_2(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} V_1(x.y, t)dt$$

este un potenţial scalar al lui $\vec{V}$.

Observaţia 11.1.3.3. Alegând alt punct (x_0, y_0, z_0) se obţine un alt potenţial scalar al lui $\vec{V}$, care diferă de primul printr-un câmp constant.

Definiţia 11.1.3.2. Un câmp vectorial de clasă C^1 se numeşte *irotaţional* sau *conservativ* dacă *rot* $\vec{V} = \vec{O}$.

Observaţa 11.1.3.4. a) Dacă V_1, V_2 , V_3 sunt componentele lui $\vec{V}$, atunci $\vec{V}$ este conservativ dacă şi numai dacă au loc egalităţile

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

b) Dacă U este camp scalar de clasă C^2, atunci *rot (grad U)* = $\vec{O}$, prin urmare, orice *câmp de gradienţi este câmp conservativ*, dar reciproca nu este în general adevărată. Spre exemplu:
$\vec{V}(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot\vec{j}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ este conservativ (adică $\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}$) dar nu este câmp de gradienţi (pentru că circulaţia lui $\vec{V}$ pe cercul $x^2 + y^2 = 1$ este 2π)

Teorema 11.1.3.4. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime *deschisă, stelată,* iar $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe D. Atunci, $\vec{V}$ este câmp de gradienţi dacă şi numai dacă este câmp conservativ.

Să reamintim că $D \subset \mathbb{R}^3$ este o mulţime *stelată* dacă există
$(x_0, y_0, z_0) \in S$ astfel încât oricare ar fi $(x, y, z) \in A$, segmentul de extremităţi (x_0, y_0, z_0) şi (x, y, z) (adică imaginea curbei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$
$\gamma(t) = ((1 - t)x_0 + tx, (1 - t)y_0 + ty, (1 - t)z_0 + tz))$ este conţinut în D.

Deoarece orice mulţime stelată este conexă, deducem::

Teorema 11.1.3.5. Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă şi stelată, iar $\vec{V}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 în D, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\vec{V}$ este un câmp de gradienţi în D;

b) circulaţia lui $\vec{V}$ pe orice contur din D este nulă;

c) integrala $\int\limits_{\gamma} \vec{V}\, d\vec{r}$ este independentă de γ pe D;

d) $\vec{V}$ este un câmp conservativ pe D;
e) sunt adevărate (în D) egalitățile:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x}\,,\ \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y}\,,\ \frac{\partial V_3}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

Observaţia 11.1.3.5. În multe lucrări de specialitate, noţiunea de mulţime deschisă şi stelată este înlocuită cu cea similară de domeniu simplu conex, a cărei definiţie (în $\mathbb{R}^3$) necesită cunsoştinţe de teoria suprafeţelor. De aceea a fost preferată noţiunea folosită în teoremele anterioare.

Folosirea noţiunilor de "câmp de gradienţi" şi "câmp conservativ" în locul noţiunii de " diferenţială totală exactă " este justificată prin aplicaţiile directe ale teoriei câmpurilor.

Observaţia 11.1.3.6. Independenţa de drum a integralei curbilinii de speţa a II-a este importantă pentru a observa în ce condiţii lucrul mechanic efectuat de câmpul de forţe $\vec{F}$ (x, y, z) pentru a deplasa un punct material din
M(x_0, y_0, z_0) în N(x_1, y_1, z_1) nu depinde de drumul parcurs, ci doar de extremităţile sale.

Cele mai importante câmpuri de forţe pentru care lucrul mecanic este independent de drum sunt:

- Forţa de greutate $\vec{F} = -\,mg\,\vec{k}$;
- Forţa de atracţie newtoniană $\vec{F} = -\,\frac{k}{r^3}\cdot\vec{r}$
- Forţa elastică $\vec{F} = -\,k^2\,\vec{r}$;

(aici $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ şi $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$)

11. INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE. CÂMPURI DE GRADIENŢI

11.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 11.2.1. *Fie câmpul scalar $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.*
a) Să se determine (grad U)(1, 1, 1)
b) Să se determine $\frac{\partial U}{\partial \vec{v}}(1, 1, 1)$, *unde* $\vec{v}$ *este versorul gradientului în punctul (1, 1, 1)*

Soluţie. a) $(\text{grad } U)(1, 1, 1) = \frac{\partial U}{\partial x}(1, 1, 1) \cdot \vec{i}_A + \frac{\partial U}{\partial y}(1, 1, 1) \cdot \vec{j}_A + \frac{\partial U}{\partial z}(1, 1, 1) \cdot \vec{k}_A$ unde A = (1, 1, 1) iar $\{\vec{i}_A, \vec{j}_A, \vec{k}_A\}$ este reperul natural în $T_A\mathbb{R}^3$. Rezultă $(\text{grad } U)(1, 1, 1) = 2(\vec{i}_A + \vec{j}_A + \vec{j}_A)$.

b) $\frac{\partial U}{\partial \vec{v}}(1,1,1) = \vec{v} \cdot (\text{grad}U)(1,1,1) = \frac{(\text{grad}U)(1,1,1)}{\| (\text{grad}U)(1,1,1) \|} \cdot (\text{grad}U)(1,1,1) = \|(\text{grad } U)(1, 1, 1)\| = \sqrt{12}$

Exerciţiul 11.2.2. *Să se determine divergenţa şi rotorul câmpului vectorial*

$$\vec{V} = x^2yz \cdot \vec{i} + xy^2z \cdot \vec{j} + xyz^2 \cdot \vec{k}$$

Soluţie. Notând $V_1(x, y, z) = x^2yz$, $V_2(x, y, z) = xy^2z$, $V_3(x, y, z) = xyz^2$ rezultă:

$$(\text{div } \vec{V})(x, y, z) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 6xyz$$

$$(\text{rot } \vec{V})(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (xz^2 - xy^2) \cdot \vec{i} + (x^2z - yz^2) \cdot \vec{j} + (y^2z - x^2z) \cdot \vec{k}.$$

Exerciţiul 11.2.3. *Să se demonstreze că* $\vec{V} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ *unde* $\vec{r}$ *este vectorul de poziţie şi* $r = \|\vec{r}\| \neq 0$, *este un câmp vectorial solenoidal.*

Soluţie. Deoarece $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ rezultă

$$\vec{V} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{j} + + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \vec{k}$$

Calcule directe arată că $(\text{div } \vec{V})(x, y, z) = 0$, deci $\vec{V}$ este solenoidal pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Exerciţiul 11.2.4. *Să se demonstreze că*

$$\vec{V} = yz(2x + y + z) \cdot \vec{i} + zx(x + 2y + z) \cdot \vec{j} + xy(x + y + 2z) \cdot \vec{k}$$

este un camp vectorial irotaţional.

Soluţie. Fie $V_1(x, y, z) = yz(2x + y + z)$, $V_2(x, y, z) = zx(x + 2y + z)$ şi
$V_3(x, y, z) = xy(x + y + 2z)$.

Deoarece $\frac{\partial V_3}{\partial y}$ *(x, y, z)* = $\frac{\partial V_2}{\partial z}$ *(x, y, z) = x(x + 2y + 2z)*

$\frac{\partial V_1}{\partial z}$ *(x, y, z)* = $\frac{\partial V_3}{\partial x}$ *(x, y, z) = y(2x + y+ 2z)*

$\frac{\partial V_2}{\partial x}$ *(x, y, z)* = $\frac{\partial V_1}{\partial y}$ *(x, y, z) = z(2x + 2y + z)*

rezultă că *rot* $\vec{V} = \vec{0}$ în $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 11.2.5. Să se calculeze I= $\int_\gamma xdx$ + e^xdy, unde γ este definită de ecuaţiile parametrice x = ln(1+ t), y = $\sqrt{1+t}$, t∈ [0, 1].

Soluţie. I = $\int_\gamma xdx$ + e^xdy = $\int_0^1 \left[\ln(1+t) \cdot \frac{1}{1+t} + e^{\ln(1+t)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \right] dt$ =

= $\int_0^1 \left[\frac{\ln(1+t)}{1+t} + \frac{\sqrt{1+t}}{2} \right] dt$ = $\left[\frac{1}{2} \ln^2(1+t) + \frac{1}{3}\sqrt{(1+t)^3} \right]\Bigg|_0^1$ =

= $\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

Exerciţiul 11.2.6. Să se calculeze I = $\int_\gamma ydx - xdy + (x^2 + y^2 + z^2)dz$, unde γ este dată de reprezentarea parametrică x = - tcos t + sin t ,
y = t sin t + cos t , z = t + 1, t∈ [0, π].

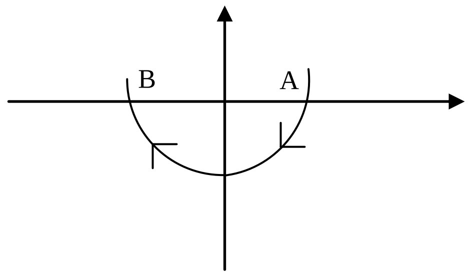
Soluţie. I = $\int_\gamma ydx - xdy + (x^2 + y^2 + z^2)dz$ =

$$= \int_0^1 [(t\sin t + \cos t)(t\sin t) - (-t\cos t + \sin t)(t\cos t) +$$

$$+ [(-\mathrm{t}\cos \mathrm{t} + \sin \mathrm{t})^2 + (t\sin t + \cos t)^2 + (t+1)^2]dt =$$

$$= \int_0^\pi (3t^2 + 2t + 2)dt = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi .$$

Exerciţiul 11.2.7. Să se calculeze $\int_\gamma (y+1)dx + x^2 dy$, unde (γ) este porţiunea din parabola y = x^2 – 1 cuprinsă între punctele A(1, 0) şi B(-1, 0), având originea în A.
Soluţie. Curba este dată prin ecuaţia sa explicită.



Ecuaţiile parametrice se deduc imediat:

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$$

Punctul A(1, 0) corespunde valorii t = 1 şi punctual B(-1, 0) corespunde valorii t = -1.
Integrala va fi:

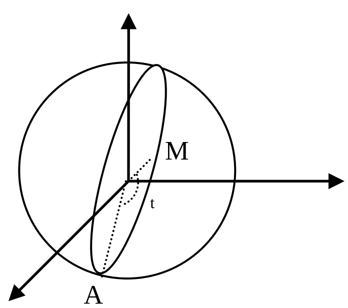
$$I = \int_{1}^{-1} [(t^2 - 1 + 1) + t^2 \cdot 2t]dt = -\int_{-1}^{1} (2t^3 + t^2)dt = -2\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

Exerciţiul 11.2.8. Să se calculeze

$$\oint_{\gamma} (y - 2z)dx + (x - z)dy + (2x - y)dz$$

unde γ este dat de ecuaţiile implicite $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y + z = 0$ şi are originea şi capătul în $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Soluţie.



Ecuaţiile parametrice ale cercului aflat la intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cu planul $x - y + z = 0$ se obţin rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = y \\ (x + z)^2 - 2xz = 1 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = y \\ xz = \dfrac{2y^2 - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y + \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \\ z = \dfrac{y - \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = \dfrac{y - \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \\ z = \dfrac{y + \sqrt{2 - 3y^2}}{2} \end{cases}, \ y \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$$

care reprezintă ecuaţia celor două semicercuri ce formează cercul γ.

Pentru calculul integralei curbilinii este utilă notaţia y = $\sqrt{\frac{2}{3}}\sin t$

$t \in [0, 2\pi]$. Ecuaţiile parametrice ale lui γ devin:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\sin t \\ z = \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, t \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Integrala curbilinie este:

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{2}{\sqrt{6}}\sin t + \frac{2}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos t\right) + \right.$$

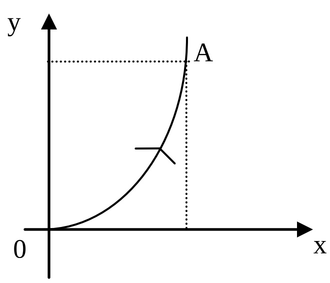
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\cos t\right) +$$

$$\left.\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{2}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{2}{\sqrt{6}}\sin t\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\right]dt = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Exerciţiul 11.2.9. În fiecare punct al unui plan, un punct material este acţionat de forţa $\vec{F}$ ale cărei proiecţii pe axele de coordonate sunt

$F_1(x, y) = xy$, $F_2(x, y) = x + y$. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$, când punctul material se deplasează din origine în A(1, 1) pe parabola $y = x^2$.

Soluţie. Ecuaţiile parametrice ale lui γ sunt: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$.

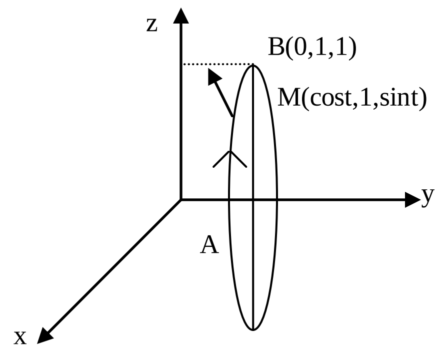


Pentru O(0, 0) obţinem t = 0, iar pentru A(1, 1) obţinem t = 1.

$$L = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \int_\gamma xydx + (x+y)dy =$$

$$= \int_0^1 [t\cdot t^2 \cdot 1 + (t+t^2)\cdot 2t]dt = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}.$$

Exerciţiul 11.2.10. Fie $\vec{F}$ o forţă variabilă având mărimea invers proporţională cu distanţa de la punctul ei de aplicaţie la axa Oz, dirijată după perpendiculara pe această axă şi îndreptată spre ea. Să se determine lucrul mecanic efectuat prin deplasarea unui punct material sub acţiunea acestei forţe pe cercul x = cos t, y = 1, z = sin t din punctul (1, 1, 0) în punctul (0, 1, 1) în sens direct faţă de direcţia pozitivă a axei Oy.



Din datele problemei rezultă:

$$\vec{F}\,(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-x\,\vec{i} - y\,\vec{j})$$

Curba pe care se deplasează punctul are ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 \\ z = \sin t, t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Lucrul mecanic este:

$$L = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \frac{k}{\sqrt{\cos^2 t + 1}}[(-\cos t)\sin t + 1 \cdot 0]dt =$$

$$= k\sqrt{1 + \cos^2 t}\Big|_0^{\pi/2} = k(1 - \sqrt{2}).$$

Exercițiul 11.3.12. Să se demonstreze că

$$\vec{V}(x, y) = (2xy + y^2)\cdot \vec{i} + (x^2 + 2xy)\cdot \vec{j}$$

este un câmp de gradienți în $\mathbb{R}^2$ și să se determine un potențial scalar pentru acest câmp.

Soluție. $\mathbb{R}^2$ este o mulțime deschisă și stelată. Dacă $V_1(x, y) = 2xy + y^2$ și $V_2(x, y) = x^2 + 2xy$, atunci $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, deci $\vec{V}$ este câmp de gradienți.

Un potențial scalar al său este:

$$U(x, y) = \int_0^x V_1(t,0)dt + \int_0^y V_2(x,t)dt =$$

$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y (x^2 + 2xt)dt = (x^2 t + xt^2)\Big|_0^y = x^2 y + xy^2$$

Exercițiul 11.3.13. Să se demonstreze că

$$\vec{V}(x, y, z) = y^2 z\cdot \vec{i} + (2xyz + 1)\cdot \vec{j} + xy^2\cdot \vec{k}$$

este un câmp de gradienți în $\mathbb{R}^3$ și să se determine un potențial scalar al său.

Soluție. Cu notațiile obișnuite obținem:

$V_1(x, y, z) = y^2 z$, $V_2(x, y, z) = 2xyz + 1$, $V_3(x, y, z) = xy^2$.

Deoarece $\mathbb{R}^3$ este mulțime deschisă și stelată și

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x} = 2yz;\ \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial x} = y^2;\ \frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{\partial V_3}{\partial y} = 2xy$$

rezultă că $\vec{V}$ e câmp de gradienți.

Un potențial scalar al său este :

$$U(x, y, z) = \int_0^x V_1(t,0,0)dt + \int_0^y V_2(x,t,0)dt + \int_0^z V_3(x,y,t)dt =$$

$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y 1dt + \int_0^z xy^2 dt = y + xy^2 z$$

Exercițiul 11.3.14. Se consideră câmpul vectorial

$$\vec{V}(x, y, z) = \frac{2x}{x^2 + y^2}\cdot \vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\cdot \vec{j} + 2z\cdot \vec{k}\ .$$

Să se demonstreze că $\vec{V}$ este conservativ pe mulțimea deschisă

$$D = \{(x, y, z),\ x^2 + y^2 \neq 0\}$$

și să se calculeze circulația lui $\vec{V}$ pe cercul γ: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ parcurs o dată pozitiv în raport cu semiaxa Oz.

Soluție. Avem:

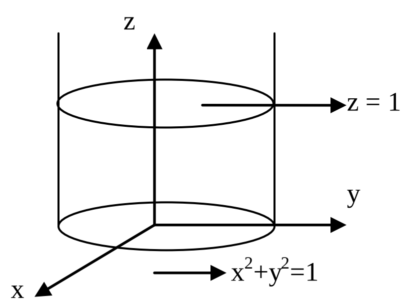
$V_1(x, y, z) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $V_2(x, y, z) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$, $V_3(x, y, z) = 2z$.

Deoarece $\frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial V_3}{\partial x}(x,y,z) = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial V_3}{\partial y}(x,y,z) = 0,$$

$\forall$ (x, y, z)$\in \mathbb{R}^3$ cu $x^2 + y^2 > 0$ rezultă că $\vec{V}$ este câmp conservativ pe domeniul său de definiţie, mulţimea D = {(x, y, z), $x^2 + y^2 \neq 0$}.



Cercul γ este intersecţia suprafeţei cilindrice de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$ cu planul de ecuaţie z = 1. Ecuaţiile sale parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1, t \in [0,2\pi] \end{cases}.$$

Circulaţia lui $\vec{V}$ pe γ este $\oint_\gamma \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy + 2zdz$ =

$$\int_0^{2\pi}[2\cos t(-\sin t) + 2\sin t\cos t + 2\cdot 1\cdot 0]dt = \int_0^{2\pi} 0\cdot dt = 0.$$

Să observăm că teorema 11.1.3.5. nu poate fi aplicată deoarece mulţimea A nu este o mulţime stelată.

Exerciţiul 11.3.15. Să se calculeze lucrul mechanic efectuat de forţa de greutate $\vec{G}$ pentru a deplasa punctul material de masă m din poziţia $A(x_1,y_1,z_1)$ în poziţia $B(x_2,y_2,z_2)$.

Soluţie. $\vec{G}$ (x, y, z) = - mg$\vec{k}$ este un câmp conservativ pe $\mathbb{R}^3$, care este mulţime deschisă şi stelată. Un potenţial scalar al său este
U(x, y, z) = - mgz. Lucrul mecanic este:

$$L = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} -\text{mgdz} \cdot \vec{G}\cdot d\vec{r} = -\text{mgz}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} = \text{mg}(z_1 - z_2)$$

Exerciţiul 11.3.16. Să se determine lucrul mecanic realizat de forţa elastică $\vec{F}$ = - $k^2\vec{r}$, pentru a deplasa un punct material din $A(x_1, y_1, z_1)$ în
$B(x_2, y_2, z_2)$.

Soluție. $\vec{F}$ (x, y, z) = -k^{2}x$\cdot \vec{i}$ - k^{2}y$\cdot \vec{j}$ - k^{2}z$\cdot \vec{k}$ este un câmp de gradienți pe $\mathbb{R}^3$ şi un potențial scalar al său este:

$$U(x, y, z) = \int_0^x -k^2 t dt + \int_0^y -k^2 t dt + \int_0^z -k^2 t dt = -\frac{k^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Atunci L = $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{k^2}{2}\left(\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) - \left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right)\right).$

12. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.

12.1. Noţiuni teoretice şi rezultate fundamentale

12.1.1. Suprafeţe orientabile

Considerăm o suprafaţă netedă şi simplă, reprezentată de pânza $S : D \to \mathbb{R}^3$ injectivă, de clasă C^1, cu imaginea (S). Pentru orice punct $M \in (S)$ există şi este unic un punct $(u, v) \in D$, astfel încât $M = S(u, v)$. În punctul M există doi versori normali la (S) şi anume:

$$\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|} \text{ şi } -\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\|}$$

Definiţia 12.1.1.1. Suprafaţa (S) se numeşte *orientabilă* (sau cu două feţe) dacă funcţia care asociază fiecărui punct $M \in (S)$ unul din cei doi versori normali la (S) în punctul M este o funcţie continuă. O suprafaţă orientabilă împreună cu o alegere a unuia din cei doi versori se numeşte suprafaţă *orientată*.

Exemplul 12.1.1.1. Orice suprafaţă netedă definită explicit de ecuaţia $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ este orientabilă: dacă alegem în fiecare punct al său sensul normalei, astfel încât aceasta să facă un unghi ascuţit cu sensul pozitiv al axei Oz, spunem că suprafaţa este *orientată pozitiv* sau că alegem *faţa superioară* a suprafeţei, în caz contrar, spunem că suprafaţa este *orientată negativ* sau că alegem *faţa inferioară.*

Exemplul 12.1.1.2. Orice suprafaţă (S) netedă, simplă şi închisă este orientabilă. În acest caz există două domenii D_1, D_2 încât Fr D_1=Fr D_2 = (S), $D_1 \cup D_2 \cup (S) = \mathbb{R}^3$, D_1 mărginit, D_2 nemărginit. Dacă în fiecare punct al lui (S) alegem sensul normalei îndreptat spre domeniul D_2, obţinem *faţa exterioară* ; dacă în fiecare punct al lui (S) alegem sensul normalei îndreptat spre domeniul D_1, obţinem *faţa interioară*.

Observaţia 12.1.1.1. Dacă $S : D \to \mathbb{R}^3$ şi $S_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ sunt două pânze netede, simple, nesingulare echivalente şi dacă $T : D \to D_1$, este difeomorfism, astfel încât $S_1 \circ T = S$, cu jacobianul strict pozitiv în fiecare punct, atunci (S) şi (S_1) coincid şi au aceeaşi orientare (versorul normală este independent de reprezentarea parametrică aleasă)

12.1.2. Integrala de suprafaţă de al doilea tip

Definiţia 12.1.2.1. Considerăm o suprafaţă netedă şi orientată, definită parametric prin $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil şi fie $(S) \subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de componente $V_1, V_2, V_3 : (S) \to \mathbb{R}$. Fie $d=\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ o diviziune arbitrară a domeniului D. Fie ξ un sistem arbitrar de "puncte intermediare" $(u_i, v_i) \in D_i$, $i = 1, 2, \ldots,n$, $(x_i, y_i, z_i) \in (S_i)$ unde
$(S_i) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D_i\}$. Fie T_i domeniul corespunzător lui (S_i) în planul tangent la (S) în punctul (x_i, y_i, z_i), $i=1, 2, \ldots, n$ şi $\vec{n}_i$, versorul normalei la suprafaţă în acest punct. Câmpului vectorial $\vec{V}$, diviziunii d şi sistemului ξ le asociem suma:

$$\sigma_{\vec{V}}(d,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{V}(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{n}_i \right) \cdot aria(T_i)$$

Câmpul vectorial $\vec{V}$ se numeşte *integrabil în raport cu coordonatele pe* (S), dacă există $J_2 \in \mathbb{R}$ încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ astfel încât, oricare ar fi diviziunea d cu $\|d\| < \eta$ şi oricare ar fi sistemul ξ de puncte intermediare, să avem:

$$\left|\sigma_{\vec{V}}(d,\xi) - J_2\right| < \varepsilon$$

Numărul J_2 se numeşte *integrala de suprafaţă de al doilea tip* sau în *raport cu coordonatele* a câmpului vectorial $\vec{V}$ şi se notează

$$J_2 = \iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy$$

Observaţia 12.1.2.1. Dacă $\vec{V}$ este *câmpul vectorial al vitezelor* particulelor de fluid care trece printr-o suprafaţă, atunci numărul J_2 reprezintă *fluxul câmpului vectorial* $\vec{V}$ *prin suprafaţa orientată (S)*.

Teorema 12.1.2.1. Considerăm o suprafaţă netedă şi orientată şi $(S)\subset \mathbb{R}^3$ imaginea sa. Dacă $\vec{V}$ este un câmp vectorial având componentele:

$V_1, V_2, V_3 : (S) \to \mathbb{R}$, continue pe (S), atunci $\vec{V}$ este integrabil în raport cu coordonatele şi are loc egalitatea:

$$\iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$$

unde $\vec{n}$ este versorul orientat al normalei la (S) în punctul curent.

Observaţia 12.1.2.2. a) Dacă ţinem seama de formula de calcul a integralei de suprafaţă de primul tip şi de faptul că

$$\vec{n} = \frac{A\cdot\vec{i} + B\cdot\vec{j} + C\cdot\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

obţinem regula de calcul:

$$\iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy = = \iint_D \left(\tilde{V}_1\cdot A + \tilde{V}_2\cdot B + \tilde{V}_3\cdot C\right)dudv$$

unde $\tilde{V}_i(u, v) = V_i(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $i = 1, 2, 3$.

Dacă se consideră cealaltă orientare a suprafeţei (S) în membrul drept apare semnul minus.

b) Dacă folosim scrierea vectorială, obţinem:

$$\iint_S V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_S \vec{V}\cdot\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\|}dS =$$

$$\iint_S \frac{\left(\vec{V},\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)}{\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\|}dS = \iint_D \left(\vec{V},\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)dudv =$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \tilde{V}_1 & \tilde{V}_2 & \tilde{V}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

c)Dacă suprafaţa este dată explicit de ecuaţia z = f(x, y), (x, y) $\in$ D, unde D $\subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact măsurabil, atunci versorul normalei corespunzător feţei superioare este:

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

iar versorul normalei corespunzător feţei inferioare este - $\vec{n}$. În practică, fixarea orientării se face în funcţie de context.

d) Din teorema 12.1.2.1. rezultă că integrala de suprafaţă de al doilea tip, ca şi cea de primul tip, este independentă de parametrizarea lui (S), în sensul că pentru două pânze echivalente, cu aceeaşi orientare, valoarea integralei este aceeaşi şi diferă doar prin semn, dacă se schimbă orientarea.

12.1.3. Formule integrale

Formulele integrale stabilesc legături între unele tipuri de integrale considerate anterior şi pot fi folosite pentru a facilita calculul acestora.

Definiţia 12.1.3.1. O mulţime D $\subset \mathbb{R}^2$ se numeşte *domeniu compact elementar* dacă satisface următoarele condiţii:

a) este domeniu compact;
b) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, simple în raport cu axa Ox;
c) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, simple în raport cu axa Oy;
d) frontiera sa, Fr D, este reuniunea unui număr finit de imagini de curbe plane, netede, nesingulare, simple, închise şi este orientată pozitiv, adică în sensul de deplasare al unui observator pe Fr D, astfel încât să lase domeniul D în stânga.

Teorema 12.1.3.1. *(Formula Green-Riemann)*

Fie D $\subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact elementar şi

$\vec{V}$ (x, y) = V_1(x, y)· $\vec{i}$ + V_2(x, y)· $\vec{j}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă ce include pe D. Atunci:

$$\oint_{FrD} \vec{V}\cdot d\,\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dxdy .$$

Observaţia 12.1.3.1. Dacă $\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial y}$, atunci $\oint_{FrD} \vec{V}\cdot d\,\vec{r}$ = 0.

Teorema 12.1.3.2. Dacă D $\subset \mathbb{R}^2$ este domeniu compact elementar, atunci :

$$\text{aria(D)} = \frac{1}{2}\oint_{FrD} xdy - ydx = \int_{FrD} xdy = \int_{FrD} - ydx$$

Formula Gauss-Ostrogradski este analogul tridimensional al formulei Green-Riemann şi stabileşte o legătură între integrala de suprafaţă şi integrala triplă.

Definiţia 12.1.3.2. Pânza p : [0, 1] x [0, 1] $\to \mathbb{R}^3$ se numeşte *închisă* dacă p(u, 0) = p(u, 1) şi p(0, v) = p(1, v), oricare ar fi (u, v) $\in$ [0, 1] x [0, 1].

Pânza p : D$\to \mathbb{R}^3$, cu D $\subset \mathbb{R}^2$ domeniu compact, se numeşte *închisă* dacă există o bijecţie continuă şi cu inversa continuă φ : [0, 1] x [0, 1] $\to$D, astfel încât pânza p $\circ$ φ : [0, 1] x [0, 1] $\to \mathbb{R}^3$ să fie închisă, în sensul de mai sus.

Se numeşte *suprafaţă închisă* o suprafaţă reprezentată de o pânză închisă.

Definiţia 12.1.3.3. O mulţime $\Omega \subset R^3$ este *domeniu compact elementar* dacă:

a) este domeniu compact;
b) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Ox, fără puncte interioare comune;
c) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Oy, fără puncte interioare comune;
d) este reuniunea unui număr finit de domenii compacte simple în raport cu axa Oz, fără puncte interioare comune;
e) frontiera sa, Fr Ω este reuniunea unui număr finit de imagini de suprafeţe închise şi orientate.

Exemple. Sunt elementare următoarele domenii:

- sfera : $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$
- coroana sferică: $\{r_1^2 \le (x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le r_2^2\}$
- cilindrul: $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le r^2, 0 \le z \le h\}$
- elipsoidul: $\left\{(x,y,z): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$

Observaţia 12.1.3.1. Dacă $\Omega \subset R^3$ este un domeniu compact elementar, atunci se poate defini în mod natural versorul normală exterioară în punctul curent din Fr Ω.

Teorema 12.1.3.3. *(Formula lui Gauss-Ostrogradski)*

Fie $\Omega \subset R^3$ un domeniu compact elementar şi

$\vec{V}$ (x, y, z) = V_1(x, y.z)· $\vec{i}$ + V_2(x, y, z)· $\vec{j}$ + V_3 (x, y, z)· $\vec{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă ce include pe Ω. Atunci fluxul câmpului vectorial $\vec{V}$ prin Fr Ω, după normala exterioară $\vec{n}$ este egal cu integrala divergenţei lui $\vec{V}$ pe Ω, adică:

$$\iint_{Fr\Omega} V_1(x,y,z)dydz + V_2(x,y,z)dzdx + V_3(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x,y,z) \right) dxdydz \,.$$

Observaţia 12.1.3.2. Formula Gauss-Ostrogradski

$$\iint_{Fr\Omega} \left(\vec{V} \cdot \vec{n} \right) ds = \iiint_{\Omega} \left(div\, \vec{V} \right) dxdydz$$

se mai numeşte şi formula flux-divergenţă, pentru că permite o interpretare fizică a divergenţei unui câmp cu ajutorul fluxului printr-o suprafaţă închisă.

Corolarul 12.1.3.1. Fie $\Omega \subset R^3$ un domeniu compact elementar şi U un câmp scalar de clasă C^1 pe o mulţime deschisă care îl conţine pe Ω. Atunci:

$$\iiint_{\Omega} (gradU) dxdydz = \iint_{Fr\Omega} \vec{n} \cdot U ds$$ (formula integrală a gradientului)

Corolarul 12.1.3.2. Fie $\Omega \subset R^3$ un domeniu compact elementar şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă care îl conţine pe Ω. Atunci:

$$\iiint_{\Omega} rot\vec{V} dxdydz = \iint_{Fr\Omega} \left(\vec{n} \times \vec{V} \right) ds$$ (formula integrală a rotorului)

Corolarul 12.1.3.3. Fie G $\subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi (x_0, y_0, z_0) $\in$ G arbitrar. Fie $\vec{V}$: G $\to \mathbb{R}^3$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe G şi U : G $\to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă C^1 pe G.

Fie $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de domenii compacte elementare incluse în G, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} d(\Omega_n)$ = 0 şi (x_0, y_0, z_0) $\in \Omega_n$, oricare ar fi n $\in \mathbb{N}$. Atunci:

a) $(\operatorname{div} \vec{V})(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\operatorname{vol}\Omega_n} \iint\limits_{Fr\Omega_n} \vec{n}\cdot\vec{V}\, ds$

b) $(\operatorname{rot} \vec{V})(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\operatorname{vol}\Omega_n} \iint\limits_{Fr\Omega_n} \vec{n}\,\mathbf{x}\,\vec{V}\, ds$

c) $(\operatorname{grad} U)(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\operatorname{vol}\Omega_n} \iint\limits_{Fr\Omega_n} \vec{n}\cdot U ds$

Observaţia 12.1.3.3. Formulele din corolarul 12.1.3.3. arată că divergenţa şi rotorul unui câmp vectorial, precum şi gradientul unui câmp scalar, care au fost definite iniţial folosind axele de coordonate, nu depind de alegerea acestor axe, ci depind de câmp şi de punctul în care se calculează.

Definiţia 12.1.3.4. Fie G $\subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, f : G$\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 şi S suprafaţa definită explicit de ecuaţia z = f(x, y), orientată pozitiv.

Fie D$\subset$G domeniu compact elementar,
(S) = {(x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$: z = f(x, y), (x, y) $\in$ D} şi
(C) = {(x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$: z = f(x, y), (x, y) $\in$ Fr D}, cu orientarea indusă de pe Fr D. Atunci (C) este imaginea unei curbe orientate în $\mathbb{R}^3$ şi se numeşte *bordura orientată* a lui (S).

Observaţia 12.1.3.4. Orientarea curbei (C), indusă de orientarea de pe Fr D se numeşte orientare compatibilă cu orientarea suprafeţei (S).

Orientarea fixată pe bordura (C), compatibilă cu cea a suprafeţei (S) poate fi reprezentată intuitiv astfel: dacă $\vec{\xi}$ este vectorul tangent la curbă în punctul curent şi $\vec{n}$ este vectorul normal la suprafaţă în acelaşi punct, atunci un observator care se deplasează pe (C) în sensul lui $\vec{\xi}$, având capul spre $\vec{n}$, lasă în stânga suprafaţa (S).

Definiţia 12.1.3.5. Fie (S) $\subset \mathbb{R}^3$ imaginea unei suprafeţe date. Dacă (S) este de clasă C^2, orientată, şi se poate descompune într-un număr finit de porţiuni de suprafaţă care pot fi reprezentate prin ecuaţii explicite în raport cu fiecare variabilă, atunci (S) se numeşte *suprafaţă elementară*. În acest caz, *bordura elementară* (C) a lui (S) este imaginea drumului închis obţinut prin juxtapunerea drumurilor care au ca imagine arce de curbă incluse numai în una din bordurile porţiunilor componente.

Teorema 12.1.3.4. *(Formula lui Stokes)*

Fie (S) $\subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă elementară şi (C) bordura sa orientată. Fie $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^3$ care conţine pe (S). Atunci circulaţia lui $\vec{V}$ pe (C) este egală cu fluxul rotorului lui $\vec{V}$ prin (S), adică:

$$\oint\limits_C \vec{V}\cdot d\,\vec{r} = \iint\limits_S (rot\vec{V})\cdot\vec{n}\,ds$$

Observaţia 12.1.3.5. Din formula lui Stokes rezultă că fluxul rotorului unui câmp vectorial prin două suprafeţe care au aceeaşi bordură este acelaşi.

12.1.4. Caracterizarea câmpurilor solenoidale

Definiţia 12.1.4.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă. Câmpul vectorial $\vec{V}$, de clasă C^1 pe D, se numeşte *solenoidal (fără surse) în D*, dacă div $\vec{V} = 0$ în D. $\vec{V}$ se numeşte *câmp de rotori (câmp de vârtejuri, câmp rotaţional)* în D, dacă există un câmp vectorial $\vec{W}$, de clasă C^2 în D, încât $\vec{V}$ = rot $\vec{W}$ în D. În acest caz, $\vec{W}$ se numeşte *potenţialul vector al câmpului* $\vec{V}$.

Observaţia 12.1.4.1. Dacă $\vec{V}$ este un câmp de rotori, atunci
div $\vec{V}$ = div(rot $\vec{W}$) = 0, deci $\vec{V}$ este solenoidal. Din formula Gauss-Ostrogradski rezultă că, dacă $\vec{V}$ este solenoidal în D, atunci fluxul lui $\vec{V}$ prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar inclus în D este nul, justificând denumirea de "câmpuri fără surse" pentru câmpurile solenoidale.

În teorema următoare se dă o caracterizare completă a câmpurilor solenoidale.

Teorema 12.1.4.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $\vec{V}$ un câmp vectorial de clasă C^1 în D. Următoarele afirmaţii sunt *echivalente*:

(a) $\vec{V}$ este câmp solenoidal în D

(b) $\vec{V}$ este, local, un câmp de rotori (adică, pentru orice $a \in D$, există $r > 0$ şi un câmp vectorial $\vec{W}$, de clasă C^2 în sfera $S(a, r) \subset D$, încât $\vec{V}$ = rot$\vec{W}$ în S(a, r))

(c) fluxul lui $\vec{V}$ prin frontiera închisă a oricărui domeniu compact elementar inclus în D este nul.

Observaţia 12.1.4.2. Pentru a determina un potenţial vector $\vec{W}$, al câmpului $\vec{V}$ se procedează astfel: se consideră $\vec{W}$ de forma:

$$\vec{W}(x, y, z)=W_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + W_2(x, y, z)\cdot \vec{j},\ (x, y, z) \in S(a, r), a=(x_0, y_0, z_0)$$

Din condiţia rot $\vec{W} = \vec{V}$ se obţine:

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = V_2,\ \frac{\partial W_2}{\partial z} = -V_1,\ \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = V_3$$

unde V_1, V_2, V_3 sunt componentele lui $\vec{V}$.

Din primele două egalităţi rezultă că, pentru orice $(x, y, z) \in S(a, r)$ avem:

$$W_1(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} V_2(x, y, t)dt + \varphi_1(x, y)$$

$$W_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} V_1(x, y, t)dt + \varphi_2(x, y)$$

unde φ_1, φ_2 sunt funcţii de clasă C^2.

Ţinând seama că div $\vec{V} = 0$, ultima egalitate devine:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_3(x, y, z_0)$$

Este evident că există funcţii φ_1, φ_2, satisfăcând această egalitate. Cunoaşterea unui potenţial vector, particular este suficientă pentru găsirea oricărui alt potenţial vector, dacă mulţimea D este *deschisă şi stelată*. În cest caz două câmpuri vectoriale $\vec{W}_1$ şi $\vec{W}_2$ cu proprietatea că

rot $\vec{W}_1 = \vec{V}$ şi rot $\vec{W}_2 = \vec{V}$ diferă printr-un câmp de gradienţi.

Observaţia 12.1.4.3. În condiţiile formulei lui Stokes, fluxul unui câmp solenoidal $\vec{V}$ poate fi exprimat prin circulaţia unui potenţial vector $\vec{W}$ al lui $\vec{V}$ şi anume:

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S (rot \vec{W}) \cdot \vec{n}\, dS = \int_C \vec{W} \cdot d\vec{r}$$

unde (C) este bordura orientată a lui (S).

12. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE AL DOILEA TIP. CÂMPURI SOLENOIDALE.

12.2. Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 12.2.1. Să se calculeze $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, (S) fiind faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Soluţie. Avem: $x = 2 \sin\theta \cos\varphi$, $y = 2 \sin\theta \sin\varphi$, $z = 2 \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $A = 4 \sin^2\theta \cos\varphi$, $B = 4 \sin^2\theta \sin\varphi$, $C = 4\sin\theta\cos\theta$.

Notând $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ şi aplicând formula din observaţia 12.1.2.2. obţinem:

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_D (2\sin\theta\cos\varphi \cdot 4\sin^2\theta\cos\varphi +$$

$$+ 2\sin\theta\sin\varphi \cdot 4\sin^2\theta\sin\varphi + 2\cos\theta \cdot 4\sin\theta\cos\theta)d\theta d\varphi =$$

$$= 8 \iint_D (\sin^3\theta\cos^2\varphi + \sin^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos^2\theta)d\theta d\varphi =$$

$$= 8 \iint_D (\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta)d\theta d\varphi = 8\iint_D \sin\theta d\theta d\varphi =$$

$$= 8 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 8 \cdot 2\pi \cdot 2 = 32\pi$$

Exerciţiul 12.2.2. Să se calculeze

$$\iint_S xzdydz + yzdzdx + (x^2 + y^2)dxdy$$

pe faţa superioară a suprafeţei (S) definită prin $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

Soluţie. Ţinând seama de observaţia 12.1.2.2. c) rezultă că

$$\vec{n} = \frac{-2x \cdot \vec{i} - 2y \cdot \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

Cu formula din teorema 12.1.2.1. reducem problema la calculul unei integrale de suprafaţă de primul tip:

$$I = \iint_S xzdydz + yzdzdx + (x^2 + y^2)dxdy =$$

$$= \iint_S \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}[-2x^2z - 2y^2z + (x^2 + y^2)]dS$$

Notând $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$ obţinem integrala:

$$I = \iint_D [(-2x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)]dxdy =$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)(1 - 2x^2 - 2y^2)dxdy$$

Trecând la coordonate polare, notând $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, obţinem

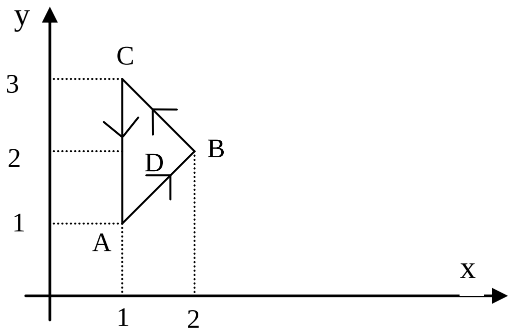
$$I = \iint_{D^*} r^2(1 - 2r^2)rdrdt = \iint_{D^*} (r^3 - 2r^5)drdt =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (r^3 - 2r^5)dr = 2\pi\left(\frac{r^4}{4} - 2 \cdot \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Exercițiul 12.2.3. Calculați direct și folosind formula lui Green-Riemann $\oint\limits_{\gamma} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, unde γ este triunghiul cu vârfurile A(1,1), B(2,2), C(1,3), parcurs o dată în sens pozitiv.

Soluție. γ este reuniunea segmentelor AB, BC, CA, unde:
AB: y = x, x $\in$[1, 2]
CB: y = 4 – x, x $\in$[1, 2]
AC: x = 1, y $\in$[1, 3]



Atunci $\oint\limits_{\gamma} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy = \int\limits_{AB} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy +$

$$+ \int\limits_{BC} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy + \int\limits_{CA} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy =$$

$$\int_1^2 [2(x^2+x^2)+(x+x)^2]dx + \int_2^1 [2(x^2+(4-x)^2)+(x+4-x)^2\cdot(-1)]dx +$$

$$\int_3^1 [2(1+y^2)\cdot 0+(1+y)^2\cdot 1]dy = \int_1^2 8x^2dx + \int_2^1 (4x^2-16x+16)dx$$

$$+ \int_3^1 (y^2+2y+1)dy = \int_1^2 (4x^2+16x-16)dx + \left.\left(\frac{y^3}{3}+y^2+y\right)\right|_3^1 =$$

$$= \left.\left(\frac{4x^3}{3}+\frac{16x^2}{2}-16x\right)\right|_1^2 + \left.\left(\frac{y^3}{3}+y^2+y\right)\right|_3^1 = -\frac{4}{3}$$

Aplicând acum formula Green-Riemann obținem:

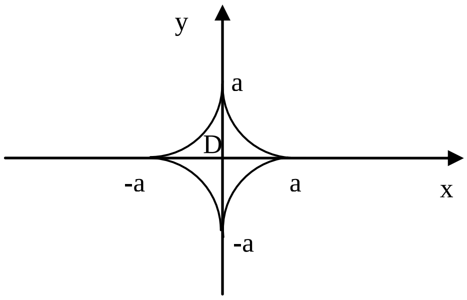
$$\oint\limits_{\gamma} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy = \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}((x+y)^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2(x^2+y^2))\right]dxdy =$$

$$= \iint\limits_D [2(x+y)-4y]dxdy = 2\iint\limits_D (x-y)dxdy = 2\int_1^2\left[\int_x^{4-x}(x-y)dy\right]dx$$

$$= 2\int_1^2 \left.\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\right|_x^{4-x} dx = 2\int_1^2 (8x-2x^2-8)dx = -\frac{4}{3}$$

Exercițiul 12.2.4. Folosind integrala curbilinie de speța a II-a, să se calculeze aria figurii limitată de curba de ecuație $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$,
a > 0.

Soluție.



Curba de ecuaţie $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ (astroida) are ecuaţiile parametrice $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t\end{cases}$, $t\in[0, 2\pi]$.

Aria sa este A = $\frac{1}{2}\int\limits_{FrD} xdy - ydx$ =

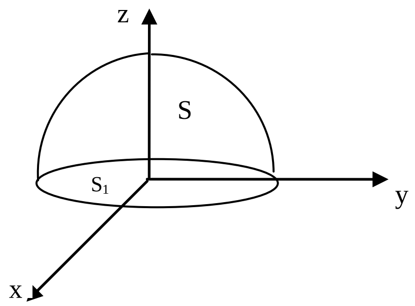
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3 t\cdot\left(3a\sin^2 t\cos t\right) - a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)\right]dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\cdot(\sin^2 t+\cos^2 t)dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2tdt$$

$$= \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \frac{3a^2\pi}{8}$$

Exerciţiul 12.2.5. Să se calculeze $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy$ pe faţa exterioară a semisferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

Soluţie. Considerăm $\Omega = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$, care este un domeniu compact elementar.



Frontiera sa este reuniunea a două suprafeţe având imaginile:

$$(S) = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$
$$(S_1) = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Aplicând formula Gauss-Ostrogradski, obţinem:

$$\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy + \iint\limits_{S_1} x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy =$$

$$= \iiint\limits_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

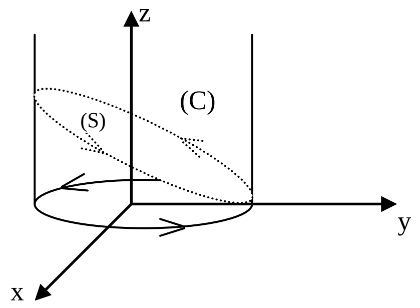
Dar $\iint\limits_{S_1} x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy = 0$ şi $\iiint\limits_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\iiint\limits_{[0,R]x[0,\frac{\pi}{2}]x[0,2\pi]} \rho^2\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$ =

$$= 3\cdot\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^R\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\varphi\big|_0^{2\pi}\right)=\frac{6\pi R^5}{5}.$$

Rezultă că $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + x^3dxdy = \frac{6\pi R^5}{5} - 0 = \frac{6\pi R^5}{5}$

Exerciţiul 12.2.5. Să se calculeze folosind formula lui Stokes circulaţia câmpului $\vec{V} = (y - x)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ pe elipsa (C) obţinută prin intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $y + z = 1$, parcursă în sens direct.

Soluţie.



În acest caz rot $\vec{V} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Alegem drept suprafaţă ce are bordura orientată (C), porţiunea din planul $y + z = 1$, limitată de cilindrul $x^2 + y^2 = 1$.

Ea are ecuaţia $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - v, (u,v) \in D \end{cases}$, unde $D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$.

Din formula lui Stokes rezultă :

$$\oint\limits_{(C)}(y-x)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\iint\limits_{(D)}-2(dydz+dzdx+dxdy) = -2\iint\limits_{(D)}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{vmatrix}dudv = -4\text{aria}(D) = -4\pi$$

Exerciţiul 12.2.6. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = xyz\cdot\vec{i} + xyz\cdot\vec{j} - \frac{1}{2}z^2(x + y)\vec{k}$$

este solenoidal în $\mathbb{R}^3$.

Soluţie. Punând $V_1(x, y, z)=xyz$, $V_2(x, y, z) = xyz$, $V_3(x, y, z)=-\frac{1}{2}z^2(x + y)$ pentru orice $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, avem

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial V_3}{\partial z} = yz + xy - z(x + y) = 0$$

Prin urmare $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 12.2.7. Să se demonstreze că fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2\cdot\vec{i} + x^2y\cdot\vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k},\ (x, y, z) \in\mathbb{R}^3$$

prin forntiera închisă a oricărui domeniu compact elementar din $\mathbb{R}^3$ este nul

Soluţie. Notând $V_1(x, y, z) = xy^2$, $V_2(x, y, z) = x^2y$, $V_3(x, y, z) = -z(x^2 + y^2)$, avem:

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = y^2 + x^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Deci câmpul $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$. Din teorema 12.1.4.1. rezultă afirmaţia.

Exerciţiul 12.2.8. Să se demonstreze că:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2\cdot \vec{i} + x^2y\cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k},\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

este un câmp de rotori în $\mathbb{R}^3$ şi să se determine un potenţial vector pentru $\vec{V}$.

Soluţie. Câmpul $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$ (exerciţiul 12.3.9). Din teorema 12.1.4.1. rezultă că $\vec{V}$ este, local, un câmp de rotori în $\mathbb{R}^3$. Căutăm un potenţial vector de o formă particulară:

$$\vec{W}(x, y, z) = W_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + W_2(x, y, z)\cdot \vec{j}$$

Egalitatea rot $\vec{W} = \vec{V}$ conduce la :

$$W_1(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} V_2(x,y,t)dt + \varphi_1(x,y) = \int_{z_0}^{z} x^2 y dt + \varphi_1(x,y) =$$

$$= x^2y(z - z_0) + \varphi_1(x, y)$$

$$W_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} V_1(x,y,t)dt + \varphi_2(x,y) = -\int_{z_0}^{z} xy^2 dt + \varphi_2(x,y) =$$

$$= -xy^2(z - z_0) + \varphi_2(x, y)$$

unde $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ este fixat, arbitrar, iar φ_1 şi φ_2 se aleg astfel ca:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = V_3(x,y,z_0),$$

adica: $$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -z_0(x^2 + y^2)$$

Putem alege, de exemplu, $\varphi_1(x, y) = z_0\frac{y^3}{3}$, $\varphi_2(x, y) = -z_0\frac{x^3}{3}$

Deci: $W_1(x, y, z) = x^2yz - x^2yz_0 + z_0\frac{y^3}{3} = x^2yz - yz_0(x^2 - \frac{y^2}{3})$

$$W_2(x, y, z) = -xy^2z + xy^2z_0 - z_0\frac{x^3}{3} = -xy^2z + xz_0(y^2 - \frac{x^2}{3})$$

iar câmpul vectorial $\vec{W}(x, y, z) = W_1(x, y, z)\cdot \vec{i} + W_2(x, y, z)\cdot \vec{j}$ este un potenţial vector pentru $\vec{V}$ într-o sferă cu centrul în (x_0, y_0, z_0). Se verifică imediat că egalitatea rot $\vec{W} = \vec{V}$ este adevărată în întreg $\mathbb{R}^3$, deci $\vec{W}$ este un potenţial vector pentru $\vec{V}$ în $\mathbb{R}^3$. Cum $\mathbb{R}^3$ este mulţime deschisă şi stelată, rezultă că orice alt potenţial vector pentru $\vec{V}$ este de forma

$\vec{W}$ + grad U, unde U este un câmp scalar de clasă C^2 în $\mathbb{R}^3$.

Exerciţiul 12.2.9. Să se determine fluxul câmpului vectorial:

$$\vec{V}(x, y, z) = xy^2\cdot \vec{i} + x^2y\cdot \vec{j} - z(x^2 + y^2)\vec{k}$$

prin faţa exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

Soluţie. Câmpul $\vec{V}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$(vezi exerciţiul 12.3.9.), iar

$\vec{W}$ (x, y, z) = $x^2yz\cdot\vec{i}$ - $xy^2z\cdot\vec{j}$ este un potenţial vector pentru $\vec{V}$ (în exerciţiul 12.3.10 am considerat $z_0 = 0$). Ţinând seama de observaţia 12.1.4.3. fluxul căutat este:

$$\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS = \int_C \vec{W}\cdot d\vec{r}$$

unde (S) este emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, iar (C) este bordura sa orientată, adică cercul $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ orientat pozitiv. Ecuaţiile parametrice ale cercului (C) fiind x = cos t, y = sin t, z = 0, $t \in [0, 2\pi]$, rezultă:

$$\int_C \vec{W}\cdot d\vec{r} = \int_C x^2yzdx - xy^2zdy = 0,$$

prin urmare fluxul căutat este nul.

Exerciţiul 12.2.10. Să se calculeze:

$$\iint_S -dydz + dzdx + dxdy$$

unde (S) este faţa inferioară a porţiunii de paraboloid $z = x^2 + (y - 1)^2$ cuprinsă în cilindrul $x^2 + y^2 = 1$.

Soluţie. Este evident că $\vec{V}$ (x, y, z) = $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ este solenoidal în $\mathbb{R}^3$ şi că, de exemplu $\vec{W}$ (x, y, z) = $z\cdot\vec{i} + (x + z)\cdot\vec{j}$ este un potenţial vector al său. Notând cu (C) bordura orientată a suprafeţei (S), aceasta este curba dată de:

$$\begin{cases} z = x^2 + (y-1)^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

parcursă în sens invers trigonometric, când se priveşte din origine şi are reprezentarea parametrică:

x = cos t, y = sin t, $z = \cos^2 t + (\sin t - 1)^2$, $t \in [0, 2\pi]$

Ţinând seama de observaţia 12.1.4.3. avem:

$$\iint_S -dydz + dzdx + dxdy = \int_C zdx + (x+z)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [-(2 - 2\sin t)\sin t + (2 + \cos t - 2\sin t)\cos t]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin t + \sin^2 t + 1 + 2\cos t - \sin 2t)dt =$$

$$= \left(2\cos t + 2\sin t + \frac{\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt + 2\pi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + 2\pi = \pi + 2\pi = 3\pi$$